

# Conclusiones múltiples conjuntivas

Autor:  
Fiore, Camillo Giuliano

Tutor:  
Rosenblatt, Lucas

2022

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Licenciatura de Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires en Filosofía.

Grado

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

TESIS DE LICENCIATURA EN FILOSOFÍA

---

**CONCLUSIONES MÚLTIPLES CONJUNTIVAS**

---

*Autor*

CAMILLO GIULIANO FIORE

L.U. 93.930.156

*camillo.g.fiore@gmail.com*

*Director*

LUCAS ROSENBLATT

*Codirector*

BRUNO DA RÉ

Febrero, 2022



# Resumen

---

Las relaciones de consecuencia tradicionales son de conclusiones simples, es decir, admiten argumentos con al menos y a lo sumo una conclusión. En los últimos tiempos, se difundió el estudio de relaciones de consecuencia de conclusiones múltiples; las mismas admiten argumentos con un número arbitrario de conclusiones—ninguna, varias o incluso infinitas. La aproximación predominante a las conclusiones múltiples asume lo que denomino una lectura *disyuntiva* o existencial: un argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  es válido si y sólo si es necesario que, si todos los  $\gamma$  en  $\Gamma$  son verdaderos, *algún*  $\delta$  en  $\Delta$  sea verdadero. Es posible, no obstante, definir una aproximación alternativa, que asume una lectura que denomino *conjuntiva* o universal: un argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  es válido si y sólo si es necesario que, si todos los  $\gamma$  en  $\Gamma$  son verdaderos, *todos* los  $\delta$  en  $\Delta$  sean verdaderos.

El enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples casi no ha sido explorado en filosofía de la lógica. El objetivo del presente trabajo es comenzar a cubrir ese vacío. Me propongo hacer un estudio exploratorio del enfoque, y sostener que tiene interés filosófico.

El trabajo se estructura en dos partes. La Parte I es técnica. Muestro cómo aplicar el enfoque conjuntivo a la lógica clásica, tanto proposicional como de primer orden, desde un enfoque tanto de Teoría de Modelos como de Teoría de la Prueba. También, considero algunas lógicas no clásicas típicas, y varias lógicas ‘clásicas’ atípicas; analizo propiedades metateóricas interesantes de los sistemas presentados. La Parte II es filosófica: doy dos familias de razones por las cuales el enfoque conjuntivo puede considerarse superior al enfoque disyuntivo. Por un lado, se desempeña mejor a la hora de modelar el razonamiento ordinario. Por otro lado, evita ambigüedades indeseables en el metalenguaje.

# Agradecimientos

---

Hay algunas personas sin las cuales ni la Tesis, ni mi recorrido por la carrera de Filosofía hubiesen sido posibles. La Tesis y la carrera quizás no sean tan importantes, pero la gente que está en nuestras vidas sí lo es, así que vale la pena mencionarla.

En primer lugar, es una alegría y un honor para mí ser parte del Grupo de Lógica de Buenos Aires. La calidez humana y calidad académica del grupo son impagables. Agradezco a todas y cada una de las personas que lo integran, por la garra y buena onda que ponen para hacer del grupo lo que es. Me gustaría mencionar, en particular, a Eduardo Barrio, a quien admiro por su enorme labor como coordinador y mentor. También, a Bruno Da Ré, Diego Tajer y Lucas Rosenblatt, quienes fueron mis directores en distintas instancias académicas, y a lo largo de toda la carrera me respondieron dudas, leyeron y corrigieron los fragmentos de texto que fui escribiendo, discutieron ideas conmigo y me dieron consejos. Por último, a Ramiro Caso, Eliana Franceschini, Nicolás Lo Guercio, Federico Pailos, Damián Szmuc y Paula Teijero, cuyos aportes fueron importantes en la escritura de este trabajo. A todos ellos: ¡Gracias!

En segundo lugar, tuve la suerte de transitar la carrera rodeado de personas que me hicieron el aguante, me brindaron su ayuda, cariño y su contención. De la Facu, quisiera mencionar a Agustina Borzi, Alba Cuenca, Bruno Muntaabski, David Moscoso, Mariela Rubin y Rocío Roitman. Del Normal, a los eternos Germán Aguirre, Lautaro Crespo y Kevin Pellegrini. Del Bachi, a Florencia Solari, Manuel Montecinos y (la flamante filósofa) Dolores Pezzani. También, conté con el apoyo y ternura de mi novia Angélica, que me acompañó (aka. bancó) durante todo el proceso de escritura. Por último, mi psicóloga Pamela, que desde comienzos de 2021 me ayudó a sortear una crisis de motivación y autoestima. A todos ellos: ¡Gracias!

---

En tercer lugar, mi familia. Mi mamá, Cristina, que siempre me respaldó, tanto a nivel emocional como económico, en mi intención de dedicarme a la Filosofía. Mi hermano menor, Julián, a quien no en vano decimos que es la luz del hogar. Mi hermano mayor, Michal, que con su perseverancia, iniciativa y fuerza, fue y es uno de mis ejemplos a seguir. Y mi papá, Héctor, que me enseñó de la mejor y única manera que pudo el valor del esfuerzo y la autosuperación. Soy lo que soy y hago lo que hago por estas personas. A todos ellos: ¡Gracias!

Por último, estoy en deuda con la Universidad de Buenos Aires, que no sólo me brindó una educación superior gratuita y de excelencia, sino también financió parte de mi formación por medio de sus becas de intercambio y de iniciación en la investigación. Espero poder retribuir, con trabajo, al menos parte de lo invertido por el Estado.

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I Exploración Técnica</b>	<b>11</b>
<b>1. La lógica CCL ...</b>	<b>12</b>
1.1. Teoría de Modelos . . . . .	13
1.2. Teoría de la Prueba . . . . .	17
1.2.1. Secuentes . . . . .	18
1.2.2. Deducción Natural . . . . .	24
1.3. Primer Orden . . . . .	27
1.4. Metainferencias . . . . .	33
<b>2. ... y su pandilla</b>	<b>40</b>
2.1. Algunas lógicas no clásicas . . . . .	40
2.2. Múltiples lógicas clásicas . . . . .	52
2.2.1. Conjunción, disyunción y dualidad . . . . .	53
2.2.2. Unión, intersección y estructuralidad . . . . .	60
<b>II Motivación Filosófica</b>	<b>70</b>
<b>3. Validez vernácula</b>	<b>71</b>
3.1. Conclusiones en la Naturaleza . . . . .	72
3.1.1. El enfoque disyuntivo . . . . .	72
3.1.2. El enfoque conjuntivo . . . . .	76
3.2. Intuiciones sobre (Meta)Validez . . . . .	81

---

<b>4. Ambigüedad Metateórica</b>	<b>88</b>
4.1. La metateoría de MCL es ambigua . . . . .	89
4.1.1. Validez como preservación de verdad . . . . .	90
4.1.2. Validez como inclusión de contenido . . . . .	94
4.2. Por qué importa evitar la ambigüedad . . . . .	98
4.3. ¿Un TONK estructural? . . . . .	102
<b>Coda: Categoricidad</b>	<b>110</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>116</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>120</b>

# Introducción

---

En el campo de la lógica filosófica, la *consecuencia lógica* es en general entendida como una relación diádica, digamos  $\rightarrow$ , tal que un enunciado de la forma  $x \rightarrow y$  presupone que el par  $\langle x, y \rangle$  constituye un argumento, y de ese argumento dice que es *válido*. Qué tipos de cosa representan las variables  $x$  e  $y$ , depende de cuáles sean los constituyentes de los argumentos. Desde la antigüedad hasta nuestros días, se cree que los argumentos del lenguaje natural pueden tener *varias* premisas, pero solo *una* conclusión; los manuales actuales de introducción a la lógica permanecen—sin excepciones, que yo sepa—fieles a esta idea.<sup>1</sup> De manera acorde, las relaciones de consecuencia más tradicionales van de *coleccion*es de oraciones, digamos  $\Gamma, \Delta, \dots$ , a *oraciones* de un lenguaje dado, digamos  $\phi, \psi, \dots$ . Así, un enunciado de validez asume la forma  $\Gamma \rightarrow \phi$ . Como no se suele imponer ninguna restricción sobre la cardinalidad de las colecciones, estas relaciones en general permiten hablar de argumentos con una cantidad arbitraria de premisas (ninguna, una, varias o incluso infinitas) y una única conclusión. Decimos que estas relaciones de consecuencia son de premisas múltiples, pero conclusiones *simples*, por motivos obvios.<sup>2</sup>

Hoy en día, la manera más común de analizar la validez es en términos de lo que se denomina preservación de verdad formal y necesaria. La idea es que un argumento es válido si y sólo si es *imposible* que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa, y además, lo anterior se cumple virtud de la *forma* del argumento y el significado de las expresiones lógicas que contiene. En términos sucintos,

---

<sup>1</sup>Para opiniones de los antiguos, véase v.g. la noción estoica de argumento reportada por Diogenes Laercio (Dorandi, 2013, 7.45). Para manuales actuales, véanse, v.g. Allen y Hand (2001, p. 1), Copi et al. (2016, p. 6), Hodges (1980, p. 53), Hurley (2014, p. 1).

<sup>2</sup>A veces se considera relaciones de consecuencia de conclusiones simples en donde se impone que la colección de premisas sea finita, o en donde se permite que la colección de conclusiones sea vacía, i.e. no haya ni una conclusión. Estos casos, sin embargo, no son los más frecuentes.

**PRESERVACIÓN DE VERDAD.** Un argumento es *válido* si y sólo si, siempre que las premisas son todas verdaderas, la conclusión es verdadera también.

en donde la expresión ‘siempre’ cumple una función doble: por un lado, cuantifica sobre toda situación posible, lo que (se asume) garantiza necesidad; por otro lado, cuantifica sobre toda asignación de significados a las expresiones no lógicas del lenguaje, lo que (se asume) garantiza formalidad. El análisis de la validez en términos de preservación de verdad fue defendido de manera célebre por Alfred Tarski (1936/1983b).<sup>3</sup>

Hay cierto consenso en que, si una relación de consecuencia preserva verdad, entonces satisface una serie de condiciones, en virtud de las cuales la denominamos *tarskiana*. Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal proposicional:

**Definición 1.** Una relación de consecuencia lógica *tarskiana* sobre  $\mathcal{L}$  es una relación diádica  $\rightarrow$  que va de conjuntos de oraciones a oraciones de  $\mathcal{L}$ , es invariable bajo sustitución,<sup>4</sup> y satisface las siguientes condiciones:

- (a)  $\{\phi\} \rightarrow \phi$
- (b) Si  $\Gamma \rightarrow \phi$  y  $\Gamma \subseteq \Delta$ , entonces  $\Delta \rightarrow \phi$
- (c) Si  $\Gamma \rightarrow \delta$  para todo  $\delta$  en  $\Delta$ , y  $\Delta \rightarrow \phi$ , entonces  $\Gamma \rightarrow \phi$

De manera intuitiva, la condición (a) dice que la consecuencia lógica es (en cierta medida) *reflexiva*, dado que toda oración se autoimplica. La condición (b), que la consecuencia lógica es *monótona*, es decir, agregar premisas a un argumento válido siempre devuelve otro argumento válido. Por último, (c) dice que la consecuencia lógica es (en cierta medida) *transitiva*, dado que si un conjunto implica todas las oraciones de otro, también implica todas sus consecuencias. Quienes adscriben al análisis de la validez en términos de preservación de verdad, tienden a pensar que los principios (a), (b) y (c) son definitorios de cualquier relación que pretenda modelar la validez de conclusiones simples.

<sup>3</sup>Que sea la manera más común de entender la validez, no significa que sea la única. Dos familias de lógicas que *prima facie* rechazan este análisis son la intuicionista (véase Moschovakis, 2021) y la relevante (véase Mares, 2020).

<sup>4</sup>En términos informales, una sustitución es una función que reemplaza, de manera uniforme, las variables proposicionales de las oraciones del lenguaje por oraciones cualesquiera. La relación  $\rightarrow$  es invariable bajo sustitución si y sólo si, para toda sustitución  $\sigma$  y para cualesquiera  $\Gamma$  y  $\phi$ , si  $\Gamma \rightarrow \phi$  entonces  $\sigma(\Gamma) \rightarrow \sigma(\phi)$ . (Véase Jansana (2016) para más detalles.) La invariancia bajo sustitución se entiende como una consecuencia de (o una manera de capturar) el hecho de que la consecuencia lógica es una relación formal.

Al exponer la lectura intuitiva de las condiciones (a) y (c), usamos la aclaración parentética “en cierta medida”. La razón es que, en sentido estricto, las relaciones de consecuencia tarskianas no son ni reflexivas ni transitivas. Las nociones de reflexividad y transitividad son relación-teóricas, es decir, provienen de la teoría de las relaciones. Sus definiciones usuales son las que siguen (véase, v.g. Boolos et al., 2002, p. 143):

**Definición 2.** Sea  $R$  una relación diádica sobre un conjunto  $A$

- $R$  es *reflexiva* si y sólo si para todo  $x$  en  $A$ ,  $xRx$ .
- $R$  es *transitiva* si y sólo si para todos los  $x, y, z$  en  $A$ , si  $xRy$  y  $yRz$ , entonces  $xRz$ .

Nótese que, en la definición,  $A$  es tanto el dominio como el codominio de  $R$ . Las relaciones de consecuencia tarskianas, sin embargo, no están definidas sobre un conjunto único que haga las veces de dominio y codominio. Luego, no son el tipo de cosa que puede ser reflexiva o transitiva. Las condiciones (a) y (c) expresan, se suele asumir, una manera razonable de restringir las condiciones de reflexividad y transitividad al contexto de las relaciones de consecuencia de conclusiones simples.

En su trabajo fundacional en Teoría de la Prueba, Gerhard Gentzen (1934–35) define el conocido cálculo LK para la lógica clásica (véase Sec. 1.3). Las reglas de LK contienen apariciones de un símbolo, digamos  $\Rightarrow$ , que se asume que no pertenece al lenguaje objeto. La interpretación habitual de LK entiende a  $\Rightarrow$  como denotando la relación de consecuencia lógica.<sup>5</sup> Bajo esta lectura, la consecuencia de LK va de colecciones finitas de oraciones—hasta aquí sin sorpresas—a otras *colecciones* de oraciones, finitas también—he aquí la innovación. Permite hablar de argumentos con una cantidad arbitraria finita de premisas (una, ninguna o varias) y una cantidad también arbitraria finita de conclusiones. Los posteriores trabajos de Carnap (1943), Kneale (1956) y Scott (1974) continuaron explorando relaciones de consecuencia cuyos codominios contienen colecciones de oraciones. Decimos que tales relaciones son de conclusiones *múltiples*, y salvo aviso en sentido contrario, asumimos que las colecciones del caso pueden ser infinitas.

<sup>5</sup>Como señalan Shoesmith y Smiley (1978, p. 20), la lectura habitual de LK contradice la sugerencia del mismo Gentzen, quien en su trabajo dice de manera explícita que una expresión del tipo  $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_n$  significa nada más que  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n$  (p. 290). A mi entender, bajo la interpretación gentzeniana LK es un cálculo para valideces clásicas condicionales.

En la actualidad, el estudio y uso de las conclusiones múltiples se encuentra consolidado; las vemos tanto en teoría de la prueba como en teoría de modelos, tanto en artículos exploratorios como en manuales didácticos. El enfoque más común—de hecho, el único que circula con cierta regularidad en la literatura—asume lo que denomino una lectura *disyuntiva* o *existencial*. A grandes rasgos, sostiene que un enunciado del tipo “ $\Delta$  se sigue de  $\Gamma$ ” es en algún sentido equivalente al enunciado “La disyunción de las cosas en  $\Delta$  se sigue de la conjunción de las cosas en  $\Gamma$ ”. El enfoque no se encuentra atado a ningún análisis en particular de la noción de validez. Sin embargo, y como mencionamos antes, el análisis más difundido de la validez es en términos de preservación de verdad. Por eso, podemos tomar como referencia la siguiente formulación sucinta:

**ENFOQUE DISYUNTIVO.** Un argumento es válido si y sólo si, siempre que todas las premisas son verdaderas, alguna de las conclusiones es verdadera también.

Según el enfoque, entonces, un argumento es sólido (i.e. válido y con premisas verdaderas) sólo si respalda sus conclusiones por medio de un enunciado existencial, a saber, el que afirma que al menos una de las conclusiones es verdadera; a su vez, ese enunciado existencial es equivalente a la disyunción de todas las conclusiones.<sup>6</sup> Por eso sostenemos que el enfoque hace una lectura disyuntiva o existencial de las conclusiones múltiples. En lo que sigue, decimos que una relación de consecuencia es de conclusiones múltiples *disyuntivas* si y sólo si es de conclusiones múltiples y, además, preserva verdad en el sentido especificado por el enfoque disyuntivo.

Hay cierto consenso en que, si una relación de consecuencia es de conclusiones múltiples disyuntivas, entonces satisface una serie de condiciones, en virtud de las cuales la denominamos *Scott*:<sup>7,8</sup>

<sup>6</sup>Con ‘equivalente’, me refiero a equivalencia informal o intuitiva. El argumento podría tener infinitas conclusiones. En ese caso, para probar la equivalencia haría falta una lógica con reglas infinitarias.

<sup>7</sup>La conversa no vale, es decir, no toda relación de consecuencia Scott preserva verdad en el sentido especificado por el enfoque disyuntivo. Atestiguan este hecho las relaciones de consecuencia de conclusiones múltiples conjuntivas (véase *infra*, p. 7).

<sup>8</sup>La definición original de Scott asume que los conjuntos a los que se hace referencia son finitos. Aquí, relajo esta restricción, de ahí que la condición de finitud figure entre paréntesis.

**Definición 3.** Una relación de consecuencia lógica *Scott* sobre  $\mathcal{L}$  es una relación  $\rightarrow$  que va de conjuntos (finitos) de oraciones a conjuntos (finitos) de oraciones de  $\mathcal{L}$ , es invariable bajo sustitución, y satisface las siguientes condiciones:

$$(a) \{ \phi \} \rightarrow \phi$$

$$(b^*) \text{ Si } \Gamma \rightarrow \Delta \text{ y } \Gamma \subseteq \Sigma, \text{ entonces } \Sigma \rightarrow \Delta$$

$$(c^*) \text{ Si } \Gamma \rightarrow \Delta \cup \{ \phi \} \text{ y } \Gamma \cup \{ \phi \} \rightarrow \Delta, \text{ entonces } \Gamma \rightarrow \Delta$$

La condición (a) viene heredada de la noción de consecuencia tarskiana. Las condiciones (b\*) y (c\*), por su parte, se entienden como generalizaciones plausibles de (b) y (c) a un contexto de conclusiones múltiples. Quienes adscriben al análisis de la validez como preservación de verdad, tienden a pensar que las condiciones (a), (b\*) y (c\*) son definitorias de cualquier relación que pretenda modelar la validez de conclusiones múltiples.

La primera observación que motiva este trabajo es que el enfoque disyuntivo se vincula de manera un tanto curiosa con las propiedades de reflexividad y transitividad. Por un lado, vimos que una relación de consecuencia de conclusiones simples *no puede* ser reflexiva o transitiva, porque, por definición, su dominio y codominio no coinciden. Las condiciones (a) y (c) se entendían, entonces, como restricciones razonables de los requisitos de reflexividad y transitividad a un contexto de conclusiones simples. Por otro lado, las relaciones de conclusiones múltiples sí son el tipo de cosa que puede ser reflexiva o transitiva, dado que sus dominios y codominios coinciden. Uno podría esperar, entonces (o al menos, yo hubiese esperado) que satisfagan reflexividad y transitividad en el sentido estricto (o usual, o relación-teórico) de estas nociones. Pero eso no pasa. Sea  $\rightarrow$  cualquier relación de consecuencia lógica Scott sobre un lenguaje  $\mathcal{L}$ :

**Hecho 1.** Si  $\rightarrow$  es de conclusiones múltiples disyuntivas, es no reflexiva.

*Demostración.* Por definición de relación Scott,  $\rightarrow$  es una relación sobre el conjunto de todos los conjuntos de oraciones de  $\mathcal{L}$ , que denominamos  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ . El conjunto vacío  $\emptyset$  es un elemento de  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ . Siempre se da que todas las oraciones en  $\emptyset$  son verdaderas. Sin embargo, nunca se da que alguna oración en  $\emptyset$  es verdadera. Luego, no se cumple que, siempre que todas las oraciones en  $\emptyset$  son verdaderas, alguna oración en  $\emptyset$  es verdadera.

Por definición del enfoque disyuntivo, entonces,  $\emptyset$  no se autoimplica según  $\rightarrow$ , es decir,  $\emptyset \not\rightarrow \emptyset$ . Así, no se da que, para todo  $x$  en  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ ,  $x \rightarrow x$ .  $\square$

**Hecho 2.** Si  $\rightarrow$  es de conclusiones múltiples disyuntivas, y hay al menos dos conjuntos no vacíos  $\Gamma$  y  $\Delta$  tales que  $\Gamma \not\rightarrow \Delta$ , entonces  $\rightarrow$  es no transitiva.

*Demostración.* Sean  $\Gamma$  y  $\Delta$  dos conjuntos no vacíos tales que  $\Gamma \not\rightarrow \Delta$ . Por un lado,  $\Gamma \cup \{A\} \rightarrow \{A\} \cup \Delta$ , dado que siempre que todas las oraciones en  $\Gamma \cup \{A\}$  son verdaderas,  $A$  es verdadera, y por ende, alguna oración en  $\{A\} \cup \Delta$  es verdadera. Por otro lado,  $\{A\} \cup \Delta \rightarrow \Delta$ , dado que siempre que todas las oraciones en  $\{A\} \cup \Delta$  son verdaderas, alguna oración en  $\Delta$  es verdadera. Pero teníamos que  $\Gamma \not\rightarrow \Delta$ . Entonces, no se cumple que, para todos los  $x, y, z$  en  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ , si  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow z$  entonces  $x \rightarrow z$ .  $\square$

A pesar de lo anterior, el enfoque disyuntivo valida algunas versiones restringidas de reflexividad y transitividad. Por ejemplo, tenemos que reflexividad vale para conjuntos no vacíos, y transitividad queda en parte capturada por el principio conocido como ‘Cut’:

(d) Si  $\Gamma \rightarrow \{A\} \cup \Delta$ , y  $\Sigma \cup \{A\} \rightarrow \Pi$ , entonces  $\Gamma \cup \Sigma \rightarrow \Delta \cup \Pi$

Estas versiones de reflexividad y transitividad generalizan las condiciones (a) y (c), pensadas para conclusiones simples. La pregunta que surge es, ¿son todo lo generales que podríamos esperar? En otras palabras, ¿debería la validez de conclusiones múltiples ser reflexiva y transitiva *sin más*? ¿O acaso es pedir demasiado?

Vale la pena notar, porque será relevante más tarde, que el enfoque disyuntivo invalida reflexividad y transitividad en un sentido diferente de aquel en el que, por ejemplo, cualquier lógica razonable invalida una letra proposicional  $p$ . Nosotros podemos, si así lo deseamos, formular una teoría cuya relación de consecuencia subyacente sea de conclusiones múltiples disyuntivas, en donde  $p$  sea un teorema, y que la teoría sea consistente. Pero, por un lado, el Hecho 2 nos dice que cualquier teoría cuya relación de consecuencia sea de conclusiones múltiples disyuntivas, y que valide transitividad irrestricta, es trivial para conjuntos no vacíos, y *a fortiori* inconsistente. Por otro lado, la definición de validez propuesta por el enfoque disyuntivo justifica, además de las condiciones (a), (b\*) y (c\*), también el siguiente principio:

(e) Si  $\Gamma \rightarrow \Delta$ , y  $\Delta \subseteq \Sigma$ , entonces  $\Gamma \rightarrow \Sigma$

La razón es que, si un conjunto de premisas garantiza la verdad de una cierta disyunción, también garantiza la verdad de toda disyunción que resulte de agregarle a aquella unos cuantos disyuntos adicionales. Ahora bien, cualquier teoría que satisfaga el principio (e), sea reflexiva y esté formulada sobre una relación de consecuencia lógica de conclusiones múltiples disyuntivas es trivial también.<sup>9</sup> El enfoque disyuntivo es, por así decirlo, no reflexivo y no transitivo *de manera esencial*.

La segunda observación que motiva este trabajo es que el enfoque disyuntivo, a pesar de ser estándar, no constituye la única manera razonable de leer las conclusiones múltiples. Es cierto que el estudio de las conclusiones múltiples surgió a partir de la formulación de LK, y el enfoque disyuntivo está justificado para el caso de este sistema, dado que, por ejemplo, en LK  $\{A\}$  implica  $\{A, B\}$ . Sin embargo, podríamos definir otros sistemas, cuyas valideces induzcan una lectura distinta de las conclusiones múltiples. En particular, me interesa lo que denomino un enfoque *conjuntivo* o *universal*. A grandes rasgos, sostiene que un enunciado del tipo “ $\Delta$  se sigue de  $\Gamma$ ” es en algún sentido equivalente al enunciado “La conjunción de las cosas en  $\Delta$  se sigue de la conjunción de las cosas en  $\Gamma$ ”. Si entendemos a la validez es en términos de preservación de verdad, podemos tomar como referencia la siguiente formulación sucinta:

**ENFOQUE CONJUNTIVO.** Un argumento es válido si y sólo si, siempre que las premisas son todas verdaderas, las conclusiones son todas verdaderas también.

Según el enfoque, un argumento es sólido sólo si respalda sus conclusiones por medio de un enunciado universal, a saber, el que afirma que todas las conclusiones son verdaderas; a su vez, ese enunciado universal es equivalente a la conjunción de todas las conclusiones involucradas. Por eso sostenemos que el enfoque hace una lectura conjuntiva o universal de las conclusiones múltiples. En lo que sigue, decimos que una relación de consecuencia es de conclusiones múltiples *conjuntivas* si y sólo si es de conclusiones múltiples y, además, preserva verdad en el sentido especificado por el enfoque conjuntivo.

<sup>9</sup>Por reflexividad, el conjunto vacío se autoimplica, y por (c\*) y (e), cualquier conjunto implica a cualquier otro conjunto.

Una diferencia relevante entre los enfoques disyuntivo y conjuntivo radica en la lectura que inducen del conjunto vacío,  $\emptyset$ . Es estándar definir una *verdad lógica* como una oración que siempre es verdadera, y una *falsedad lógica* como una oración que nunca lo es.<sup>10</sup> Una verdad lógica se sigue de cualquier cosa y sólo implica verdades lógicas; una falsedad lógica sólo se sigue de falsedades lógicas, e implica cualquier cosa. Ahora bien, siempre se da que las oraciones en  $\emptyset$  son todas verdaderas, aunque nunca se da que alguna lo es. Por eso, bajo el enfoque disyuntivo  $\emptyset$  sólo implica verdades lógicas (ninguna oración que no siempre sea verdadera puede su consecuencia),<sup>11</sup> y al mismo tiempo, sólo se sigue de falsedades lógicas (ninguna oración que a veces sea verdadera lo puede implicar). Así, decimos que  $\emptyset$  funciona como verdad lógica en cuanto premisa (es decir, desde el punto de vista de las cosas que implica) pero como falsedad lógica en cuanto conclusión (es decir, desde el punto de vista de las cosas de las que se sigue). La situación cambia, sin embargo, cuando pasamos al enfoque conjuntivo. Ahora,  $\emptyset$  sólo implica verdades lógicas, pero además, *se sigue de cualquier cosa*. Así, decimos que  $\emptyset$  funciona como verdad lógica tanto en cuanto premisa, como en cuanto conclusión. Vemos que el enfoque conjuntivo induce una lectura más uniforme de este conjunto (su rol inferencial no varía dependiendo de la posición que ocupa en el argumento).

Otra diferencia relevante entre los enfoques radica en las propiedades que satisfacen sus relaciones de consecuencia. Para empezar, es simple comprobar, usando razonamientos informales, que el enfoque conjuntivo también justifica las condiciones (a), (b\*) y (c\*) de la noción de consecuencia Scott; en ese sentido, no implica un radical abandono de los principios tradicionales de las relaciones de consecuencia de conclusiones múltiples. (Para ilustrar el tipo de razonamiento utilizado, consideremos (b\*). Supongamos que siempre que todas las premisas en  $\Gamma$  son verdaderas, todas las conclusiones en  $\Delta$  son verdaderas, y además,  $\Gamma$  está incluido en  $\Sigma$ . Se sigue, por hechos básicos de teoría de

<sup>10</sup>Hay excepciones, en particular en contextos multivaluados. Por ejemplo, Beall y Ripley (2004) proponen una interpretación de la lógica paraconsistente LP en donde la validez no se entiende como preservación de verdad, sino como preservación de no falsedad; de manera acorde, las verdades lógicas son no las oraciones que son siempre verdaderas, sino las que son nunca falsas.

<sup>11</sup>En el cuerpo del texto sólo considero oraciones. En términos más generales, podríamos decir que, bajo el enfoque disyuntivo,  $\emptyset$  sólo implica conjuntos tales que siempre al menos una de sus oraciones es verdadera. Aclaraciones análogas aplican al resto de este párrafo.

conjuntos, que siempre que todas las premisas en  $\Sigma$  son verdaderas, también son verdaderas todas las premisas en  $\Gamma$ , y por ende las conclusiones en  $\Delta$ .) Pero además—y este es el punto clave—es trivial notar que el enfoque conjuntivo valida reflexividad y transitividad irrestricta. (Consideremos transitividad. Si  $\Gamma$  implica  $\Delta$ , y  $\Delta$  implica  $\Sigma$ , entonces siempre que todas las oraciones en  $\Gamma$  son verdaderas, también son verdaderas todas las oraciones en  $\Delta$ , y por ende, en  $\Sigma$ . Esto es,  $\Gamma$  implica  $\Sigma$ .) En otras palabras, el enfoque conjuntivo es ‘todo lo reflexivo y transitivo’ que uno puede pedir.

Hasta ahora, la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples fue poco o nada considerada en la literatura en filosofía de la lógica.<sup>12,13</sup> El objetivo de este trabajo es comenzar a cubrir ese vacío. Me propongo, en primer lugar, hacer una exploración técnica del enfoque conjuntivo, investigando su aplicación formal a la lógica clásica y varios otros sistemas. En segundo lugar, hacer una evaluación filosófica, con foco en las siguientes preguntas: (i) ¿pueden las conclusiones múltiples conjuntivas usarse para modelar el razonamiento ordinario? ¿y las conclusiones múltiples disyuntivas? ¿cuál de los enfoques se desempeña mejor? (ii) ¿hay aspectos filosóficos o teóricos en los que el enfoque conjuntivo sea superior al disyuntivo, o *viceversa*? En caso positivo, ¿cuáles son esos aspectos? y ¿resultan determinantes para elegir entre los dos enfoques?

El trabajo se estructura en dos partes. La Parte I es técnica. En el Capítulo 1, presento el enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples aplicado a la lógica clásica, tanto proposicional como de primer orden, tanto desde un enfoque de Teoría de Modelos como desde uno de Teoría de la Prueba. Además, analizo las metainferencias de uno de los sistemas resultantes, y sostengo que se comportan de la manera esperada—así, proporcionan evidencia adicional en favor de que el sistema definido es la lógica clásica. En el Capítulo 2, estudio varias lógicas emparentadas de uno u otro modo con la lógica proposicional clásica de conclusiones múltiples conjuntivas. Primero, considero la aplicación del enfo-

<sup>12</sup>Dos excepciones son Cintula y Paoli (2016) y Pailos y Toranzo Calderón (2021). En el primer caso, sin embargo, los autores adoptan la lectura conjuntiva de un modo que podríamos denominar instrumental—la utilizan para responder ciertas objeciones que se han lanzado contra las lógicas no contractivas—y no se comprometen con una de las tesis defendidas en este trabajo, a saber, que en el lenguaje natural *hay* argumentos con conclusiones múltiples conjuntivas. En el segundo caso, los autores consideran a la lectura conjuntiva como posibilidad, pero no le dedican un análisis más profundo.

<sup>13</sup>Saliendo de la Filosofía de la Lógica, la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples sí es más estudiada en Lógica Algebraica; véanse, v.g. Font (2001), Galatos y Tsinakis (2009) y Nowak (2020).

que conjuntivo a algunas lógicas no clásicas típicas—tomando casos tanto estructurales como subestructurales. Luego, me aboco a ciertas lógicas ‘clásicas’ atípicas, que surgen cuando partimos de la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar y ‘jugamos’ con las lecturas conjuntiva y disyuntiva de premisas y conclusiones. En el camino, hago algunas consideraciones y exhibo algunos resultados sobre las nociones de *dualidad* entre sistemas, y *sub-super-contra-*estructuralidad.

La Parte II es filosófica. Presento dos familias de razones por las cuales el enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples tiene interés. En el Capítulo 3, argumento que se desempeña mejor que el enfoque disyuntivo a la hora de modelar el razonamiento ordinario, y esto por dos motivos: (a) de hecho existen los argumentos con conclusiones múltiples conjuntivas en el lenguaje natural—contrario a lo que ocurre con las conclusiones múltiples disyuntivas; (b) el enfoque disyuntivo valida ciertas inferencias que consideramos inválidas y *viceversa*, invalida algunas que consideramos válidas; ninguno de los contraejemplos relevantes afecta al enfoque conjuntivo. En el Capítulo 4, sostengo que el enfoque disyuntivo tiene un aspecto indeseable que el conjuntivo no, y es la ambigüedad de los términos metateóricos. Además, hago una analogía entre la conectiva  $\text{TONK}$ , a menudo considerada como ilegítima, y el comportamiento estructural del enfoque disyuntivo. Por último, en la *Coda* trato con brevedad una posible objeción, que se basa en la idea de que el enfoque disyuntivo nos permite, pero el conjuntivo no, curar una vieja dolencia que aqueja a la lógica clásica, a saber, el problema de la categoricidad de Carnap. Para terminar el trabajo, esbozo algunas reflexiones finales en las *Conclusiones*.

# **Parte I**

## **Exploración Técnica**

# 1. La lógica CCL ...

---

En este capítulo caracterizo de manera precisa la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples aplicada a la lógica clásica. En las primeras dos secciones, presento y analizo el sistema que resulta de generalizar la lógica clásica proposicional de conclusiones simples a conclusiones múltiples, de tal manera que las conclusiones admitan, y de hecho induzcan, una lectura conjuntiva. Denomino a esta lógica **CCL**. En la Sec. 1.1, expongo **CCL** desde un enfoque de Teoría de Modelos, y la contrasto con la lógica clásica de conclusiones simples, **CL**, y la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**. En la Sec. 1.2, expongo **CCL** desde un enfoque de Teoría de la Prueba; proporciono un cálculo de secuentes y uno de deducción natural correctos y completos. En la Sec. 1.3, hago una breve incursión en lenguajes de primer orden; presento la lógica clásica de conclusiones múltiples que denomino **FOCL**, en donde, claro está, las conclusiones se leen de manera conjuntiva; expongo el sistema tanto desde un enfoque de Teoría de Modelos, como uno de Teoría de la Prueba. Por último, en la Sec. 1.4 analizo las metainferencias válidas en **CCL**, y sostengo que proporcionan evidencia adicional para pensar que la lógica en cuestión *es* la lógica clásica.

*El lenguaje.* En gran parte de la Tesis trabajamos con un lenguaje proposicional estándar. Usamos el símbolo  $\mathcal{L}$  para referirnos tanto al lenguaje mismo como al conjunto de sus fórmulas bien formadas—con la esperanza de que el contexto y la caridad de la lectora basten para desambiguar la referencia.<sup>1</sup> Asumimos un conjunto enumerable  $\text{Var}$  de variables proposicionales  $p, q, r, \dots$ ; denominamos a tales variables *fórmulas atómicas* de  $\mathcal{L}$ . Las constantes lógicas primitivas son  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$  y  $\perp$ , de aridades 2, 2, 2, 1 y 0 e interpretadas como conjunción, disyunción, condicional, negación y falsedad lógica, respectivamente.

---

<sup>1</sup>Adopto esta convención para simplificar la notación. Cualquiera de los métodos habituales para definir lenguajes formales (v.g. el algebraico (Font, 2001), el lógico (Boolos et al., 2002)) sirve para definir  $\mathcal{L}$ .

*Notación.* Usamos letras latinas mayúsculas  $A, B, C, \dots$  para fórmulas esquemáticas, y letras griegas mayúsculas  $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$  para conjuntos de fórmulas. Asumimos la terminología estándar de teoría de conjuntos; en particular, usamos  $\emptyset$  para denotar al conjunto vacío, y  $\mathcal{P}(\Gamma)$  para el conjunto potencia de  $\Gamma$ . Siguiendo la práctica común, escribimos  $\Gamma, \Delta$  para abreviar  $\Gamma \cup \Delta$  y  $\Gamma, A$  para abreviar  $\Gamma \cup \{A\}$ . En ocasiones nos referimos a los argumentos por medio de pares del tipo  $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ , en donde se entiende que  $\Gamma$  es el conjunto de premisas, y  $\Delta$  el de conclusiones.

## 1.1. Teoría de Modelos

En esta sección, caracterizo CCL desde un enfoque semántico o de Teoría de Modelos. Para empezar, definimos las interpretaciones (o valuaciones) de nuestro lenguaje:

**Definición 4.** Una interpretación clásica de  $\mathcal{L}$  es una función  $v : \mathcal{L} \rightarrow \{1, 0\}$  tal que

$$v(\perp) = 0$$

$$v(\neg A) = 1 - v(A)$$

$$v(A \vee B) = \max(v(A), v(B))$$

$$v(A \wedge B) = \min(v(A), v(B))$$

$$v(A \rightarrow B) = \max(1 - v(A), v(B))$$

Utilizamos  $\text{Val}$  para denotar el conjunto de todas las interpretaciones clásicas de  $\mathcal{L}$ , y  $v(\Gamma)$  para el conjunto  $\{v(A) : A \in \Gamma\}$ .

Ahora, presentamos varios sistemas lógicos. Dada cualquier lógica  $\mathbf{L}$ , decimos que un argumento con premisas  $\Gamma$  y conclusiones  $\Delta$  es *válido* en  $\mathbf{L}$ , o también, que el conjunto  $\Delta$  es  $\mathbf{L}$ -implicado por  $\Gamma$ , si y sólo si  $\Gamma \models_{\mathbf{L}} \Delta$ . Para empezar, exhibo la lógica clásica de conclusiones simples, que denominamos **CL**:

**Definición 5.** La relación  $\models_{\text{CL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{CL}} A \text{ si y sólo si, } \forall v \in \text{Val}, \text{ si } v(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ entonces } v(A) = 1.$$

En segundo lugar, exhibo la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, que me permitiré denominar **MCL**, por “Mixed Classical Logic”. Lo que motiva el nombre es

que este sistema, por cómo está definido, impone una lectura ‘mixta’ de los *relata* de la relación de consecuencia lógica: las premisas de un argumento son leídas de manera conjuntiva, y las conclusiones de manera disyuntiva.

**Definición 6.** La relación  $\models_{\text{MCL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{MCL}} \Delta \text{ si y sólo si, } \forall v \in \text{Val}, \text{ si } v(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ entonces, } v(\Delta) \not\subseteq \{0\}.$$

Por último, introducimos el sistema que, según argumento, sirve para caracterizar a la lógica clásica de conclusiones múltiples conjuntivas. Como adelanté, denomino a este sistema **CCL**, por “Conjunctive Classical Logic”.

**Definición 7.** La relación  $\models_{\text{CCL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta \text{ si y sólo si, } \forall v \in \text{Val}, \text{ si } v(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ entonces } v(\Delta) \subseteq \{1\}.$$

En lo que queda de esta sección, expongo una serie de hechos acerca de **CCL** y su relación con las otras dos lógicas presentadas. Los mismos serán útiles a lo largo del presente trabajo, tanto desde un punto de vista técnico como filosófico.

Primero, un conjunto de oraciones  $\Gamma$  implica otro conjunto  $\Delta$  en **CCL** si y sólo si implica *cada una* de las  $\delta$  en  $\Delta$ :

**Hecho 3.**  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \delta$  para todo  $\delta \in \Delta$ .

(La prueba es trivial.) A mi juicio, esto justifica la idea de que las conclusiones múltiples en **CCL** pueden y *deben* ser leídas de manera conjuntiva.

Segundo, **CCL** satisface varias propiedades estructurales de interés:

**Hecho 4.** Las siguientes condiciones valen para todo  $\Gamma, \Delta, \Sigma, \{A\} \subseteq \mathcal{L}$ :

- (a)  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Gamma$
- (b) Si  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  y  $\Delta \models_{\text{CCL}} \Sigma$ , entonces  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Sigma$
- (c) Si  $\Gamma \models_{\text{CCL}} A, \Delta$  y  $\Gamma', A \models_{\text{CCL}} \Delta'$ , entonces  $\Gamma, \Gamma' \models_{\text{CCL}} \Delta, \Delta'$ .
- (d) Si  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$ , entonces  $\Gamma, \Sigma \models_{\text{CCL}} \Delta$
- (e) Si  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta, \Sigma$ , entonces  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$

(Las pruebas se dejan como ejercicio para la lectora.) Las condiciones (a) y (b) muestran que **CCL** es reflexiva y transitiva, en el sentido usual (es decir, relación-teorético) de los

términos. La condición (c) muestra que **CCL** valida globalmente la regla conocida como como ‘Corte’ [‘Cut’]

$$\text{Cut} \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

en donde la flecha ‘ $\Rightarrow$ ’ se lee como implicación lógica, y la validez global significa que, si los argumentos por encima de la línea son válidos, el argumento por debajo también.<sup>2</sup>

Como adelantamos en la Introducción, Cut es la forma *sui generis* de transitividad que vale en **MCL**. La condición (d) muestra que **CCL** valida globalmente ‘Debilitamiento Izquierdo’ [‘Left Weakening’]:

$$\text{LW} \frac{\Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C}$$

La interpretación usual de LW es que expresa una cierta propiedad de monotonía, a saber, que agregar premisas a un argumento válido siempre da como resultado otro argumento válido (cf. Paoli, 2013); se piensa que esta propiedad es necesaria para una relación de consecuencia pueda modelar razonamientos no derrotables (v.g. Strasser y Antonelli, 2019). Por último, la condición (d) expresa que **CCL** valida globalmente la regla conocida como ‘Antidebilitamiento Derecho’ [‘Right anti-Weakening’]:

$$\text{RaW} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Cuando leemos las conclusiones múltiples de manera conjuntiva, podemos interpretar este principio como diciendo que, si una conjunción se sigue de ciertas premisas, cada uno de los conyuntos se sigue también. De hecho, considero que, en nuestro enfoque, podríamos denominar a la condición (d) ‘debilitamiento’ en lugar de ‘antidebilitamiento’.

Tercero, **CCL** viola cierto principio estructural típico de las lógicas con conclusiones múltiples habituales:

**Hecho 5.** No se da que, para  $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq \mathcal{L}$ , si  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  entonces  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta, \Sigma$ .

(*Prueba:*  $\{p\} \models_{\text{CCL}} \{p\}$ , pero  $\{p\} \not\models_{\text{CCL}} \{p, q\}$ .) En el enfoque predominante, que lee las conclusiones múltiples de manera disyuntiva, el principio invalidado por **CCL** se conoce como ‘Debilitamiento Derecho’ [‘Right Weakening’]:

<sup>2</sup>Para más sobre validez global, véase Sec. 1.2.

$$\text{RW} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

La interpretación usual de RW es que expresa otra propiedad de monotonía, a saber, que poner las conclusiones de un argumento válido en disyunción con otras oraciones cualesquiera siempre da como resultado otro argumento válido. En el enfoque conjuntivo, sin embargo, sería razonable denominar al principio en cuestión ‘Antidebilitamiento’, y no tenemos razones intuitivas para pensar que es válido: poner las conclusiones de un argumento válido en conjunción con otras oraciones cualesquiera no tiene por qué devolver otro argumento válido.

Cuarto, existe un vínculo cercano entre CCL y CL:

**Hecho 6.**  $\Gamma \models_{\text{CL}} A$  si y sólo si  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \{A\}$

(La prueba es trivial.) A mi juicio, este vínculo justifica la idea de que CCL es una generalización de, y no un sistema divergente con, la lógica clásica de conclusiones simples. El Hecho 6 también se puede expresar, de manera a mi juicio elegante, en términos relación-teóricos. Denominamos *singulete* a un conjunto de un único elemento; usamos  $\text{Sing}(\Gamma)$  para denotar el conjunto de todos los singuletes en  $\Gamma$ .<sup>3</sup> En lugar de asumir la Definición 5, podemos decir que la lógica CL tiene una relación de consecuencia que va de conjuntos a singuletes, i.e.  $\models_{\text{CL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \text{Sing}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))$ . Esta pequeña variación respecto de la definición estándar no tiene—en mi opinión—consecuencia conceptual alguna. Por otra parte, si  $\mathcal{R}$  es una relación en  $S \times P$ , y además,  $X \subseteq S$  y  $Y \subseteq P$ , decimos que la *restricción* de  $\mathcal{R}$  a  $X \times Y$  es la relación  $\mathcal{R} \upharpoonright_{X \times Y} = \mathcal{R} \cap (X \times Y)$ . Así, el Hecho 6 indica que CL es la restricción de CCL a argumentos cuyo conjunto de conclusiones es un singulete, es decir,  $\models_{\text{CL}} = \models_{\text{CCL}} \upharpoonright_{\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \text{Sing}(\mathcal{P}(\mathcal{L}))}$ .

Quinto, CCL diverge en dos sentidos de MCL:

**Hecho 7.**

- (a)  $\models_{\text{CCL}} \not\subseteq \models_{\text{MCL}}$  (v.g.  $\{p\} \models_{\text{CCL}} \emptyset$  pero  $\{p\} \not\models_{\text{MCL}} \emptyset$ )
- (b)  $\models_{\text{MCL}} \not\subseteq \models_{\text{CCL}}$  (v.g.  $\{p\} \not\models_{\text{CCL}} \{p, q\}$  pero  $\{p\} \models_{\text{MCL}} \{p, q\}$ )

<sup>3</sup>Formalmente,  $\text{Sing}(\Gamma)$  se define como  $\{x : x \in \Gamma \wedge \forall y \forall z (y \in x \wedge z \in x) \rightarrow y = z\}$

Así, **CCL** es una contralógica de **MCL**, es decir, tanto una sublógica—condición (a)—como una superlógica—condición (b).<sup>4</sup> Asimismo, **MCL** satisface un resultado análogo al Hecho 6: coincide con **CL** en los argumentos de una única conclusión. Por lo tanto, podemos entender a **CCL** y **MCL** como dos lógicas que ‘compiten’ por ser la generalización correcta de la lógica clásica a conclusiones múltiples.

Sexto y último, **CCL** disfruta de la siguiente propiedad de compacidad:

**Hecho 8.**  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  si y sólo si, para cualquier subconjunto finito  $\Delta'$  de  $\Delta$  hay algún subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tal que  $\Gamma' \models_{\text{CCL}} \Delta'$ .

*Demostración.* Probamos el sentido de izquierda a derecha, y dejamos el sentido de derecha a izquierda como ejercicio.

Supongamos  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  y sea  $\Delta'$  un subconjunto finito de  $\Delta$ . Para todo  $\delta \in \Delta'$ ,  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \delta$  (por el Hecho 3), y entonces  $\Gamma \models_{\text{CL}} \delta$  (por el Hecho 6), y  $\Gamma' \models_{\text{CL}} \delta$  para algún subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  (por la compacidad de **CL**), y por último  $\Gamma' \models_{\text{CCL}} \delta$  (por el Hecho 6 otra vez). Existe, entonces, una secuencia  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  de subconjuntos finitos de  $\Gamma$  tal que, para cada  $\delta_i \in \Delta'$ ,  $\Gamma_i \models_{\text{CCL}} \delta_i$ . La unión de todos los  $\Gamma_i$  en la secuencia es finita, e implica  $\Delta'$  en **CCL** (por el Hecho 3 otra vez). Nuestro  $\Delta'$  era arbitrario. Luego, arribamos al resultado.  $\square$

Por supuesto, no vale para **CCL** el resultado de compacidad que se suele dar para **MCL**, a saber, que  $\Gamma$  implica  $\Delta$  si y solo si existe algún subconjunto finito de  $\Gamma$  que implica  $\Delta$ . Para ilustrar un fallo de esta propiedad en **CCL**, tenemos que  $\text{Var} \models_{\text{CCL}} \text{Var}$ , pero no hay un subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\text{Var}$  tal que  $\Gamma' \models_{\text{CCL}} \text{Var}$ .

## 1.2. Teoría de la Prueba

En esta sección, caracterizo **CCL** desde un enfoque sintáctico o de Teoría de la Prueba. En el apartado 1.2.1, presento un cálculo de secuentes para **CCL**; en el 1.2.2, uno de deducción natural. Los cálculos van acompañados de sus respectivos resultados de correspondencia con  $\models_{\text{CCL}}$ , i.e. corrección y completitud.

<sup>4</sup>Para más sobre sub, super y contralógicas, véase Sec. 2.2.1.

### 1.2.1. Secuentes

Un *cálculo de secuentes tipo Gentzen* es un sistema axiomático cuyas reglas operan sobre secuentes y no sobre fórmulas (cf. Avron, 2003). Un *secuente* es un objeto de la forma  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , en donde  $\Gamma$  y  $\Delta$  son colecciones finitas de fórmulas y el símbolo  $\Rightarrow$  no es parte del lenguaje objeto. Dependiendo del caso, las colecciones que aparecen en el secuente se entienden de distintas maneras, v.g. como conjuntos, multiconjuntos, listas. Nosotros asumimos que son conjuntos. Denominamos *secuente esquemático* a un objeto de la forma  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ , en donde  $\Gamma$  y  $\Delta$  son, ya no colecciones de fórmulas, sino colecciones de fórmulas esquemáticas y/o conjuntos de fórmulas arbitrarios.

**Definición 8.** Si  $\mathcal{S}_L$  es un cálculo de secuentes, una regla de  $\mathcal{S}_L$  es de la forma

$$R \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Sigma \Rightarrow \Pi}$$

en donde  $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n, \Sigma \Rightarrow \Pi$  son secuentes esquemáticos. Decimos que  $R$  es el *nombre* de la regla,  $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$  sus *premisas*, y  $\Sigma \Rightarrow \Pi$  su *conclusión*. Una regla es *estructural* si en su formulación no aparecen constantes lógicas; es *operacional* si no es estructural. Un *axioma* es una regla que carece de premisas.

Dos nociones centrales son las de regla derivable y admisible:

**Definición 9.** Dado un cálculo  $\mathcal{S}_L$  y una regla  $R$  cualesquiera

- $R$  es *derivable* en  $\mathcal{S}_L$  si y sólo si la conclusión de  $R$  es probable en el cálculo que resulta de extender  $\mathcal{S}_L$  con las premisas de  $R$  como axiomas
- $R$  es *admisible* en  $\mathcal{S}_L$  si y sólo si, siempre que las premisas de  $R$  son probables en  $\mathcal{S}_L$ , también lo es la conclusión.

Ahora sí, pasamos a brindar un cálculo para CCL. Para eso, primero exhibimos un sistema para la lógica clásica de conclusiones simples, CL. El mismo es presentado por Negri y Von Plato (2008), y nosotros lo denominamos  $\mathcal{S}_{CL}$ . Una expresión de la forma  $A(B)$  denota una fórmula que, o bien es una ocurrencia de  $A$ , o bien de  $B$ :

**Definición 10.** El cálculo  $\mathcal{S}_{CL}$  está determinado por las siguientes reglas (usamos el superíndice ‘AT’ para indicar que una fórmula es atómica):

$$\begin{array}{c}
\text{Id-at} \frac{}{\Gamma, A^{\text{AT}} \Rightarrow A^{\text{AT}}} \\
\text{L}\vee \frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow C} \qquad \text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A(B)}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \\
\text{L}\wedge \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C} \qquad \text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B} \\
\text{L}\rightarrow \frac{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow A \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow C} \qquad \text{R}\rightarrow \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} \\
\text{L}\perp \frac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow A} \qquad \text{Gem-at} \frac{\Gamma, A^{\text{AT}} \Rightarrow C \quad \Gamma, \neg A^{\text{AT}} \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}
\end{array}$$

Vale mencionar que la regla de identidad para fórmulas arbitrarias,

$$\text{Id} \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A}$$

es derivable en  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$  (la prueba es por inducción sobre la complejidad de  $A$ , cf. Negri y Von Plato, 2008, p. 30). Por su parte, tercero excluido para fórmulas arbitrarias,

$$\text{Gem} \frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, \neg A \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}$$

es admisible. Para terminar, en  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$  no hay un par de reglas primitivas para la introducción y eliminación de la negación; la razón es que  $\neg A$  se define como  $A \rightarrow \perp$ .

Ahora que tenemos un cálculo para la lógica clásica de conclusiones simples, lo modificamos a efectos de obtener uno para CCL. Lo denominamos  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ :

**Definición 11.** El cálculo  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  resulta de extender  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$  con las reglas

$$\text{R}\emptyset \frac{}{\Gamma \Rightarrow \emptyset} \qquad \text{S-M} \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_1, \dots, \Delta_n}$$

(En donde la etiqueta S-M responde a “S-Merge”).

La interpretación intuitiva de la regla  $\text{R}\emptyset$  es simple: nos dice que el conjunto vacío se sigue de cualquier conjunto de premisas. La regla S-M, por su parte, expresa la idea de que, dados  $n$  argumentos válidos, la unión de las premisas de esos  $n$  argumentos implica la unión de sus conclusiones; nos sirve para ‘fusionar’ múltiples derivaciones (quizás de conclusiones simples) en una única derivación.

Algunas observaciones más sobre  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ . Primero, la regla LW es derivable:

$$\mathcal{S}\text{-M} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \overline{\Sigma \Rightarrow \emptyset} \text{R}\emptyset}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}$$

Esto es conveniente, dado que LW es útil en la derivación de otras reglas. Segundo, la regla  $L\rightarrow$  puede sin perjuicio alguno ser reemplazada por la regla

$$L\rightarrow^* \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow C}$$

dado que ambas son interderivables cuando contamos con LW:

$$L\rightarrow \frac{\text{LW} \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow A} \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow C} \quad L\rightarrow^* \frac{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow A \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow C}$$

Tal reemplazo es *prima facie* aconsejable por el carácter algo contraintuitivo de la regla  $L\rightarrow$ . Tercero, en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  también carecemos de reglas primitivas para la negación, pero dada la definición de  $\neg A$  como  $A \rightarrow \perp$ , las reglas

$$L\neg \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \perp} \quad R\neg \frac{\Gamma, A \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \neg A}$$

son derivables—de hecho, no son más que instancias de las reglas  $L\rightarrow^*$  y  $R\rightarrow$ , respectivamente. Cuarto y último, la regla de identidad generalizada

$$\text{ID} \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Gamma}$$

se deriva con facilidad en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ . Si  $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ,

$$\mathcal{S}\text{-M} \frac{\text{Id} \frac{}{A_1 \Rightarrow A_1} \quad \dots \quad \text{Id} \frac{}{A_n \Rightarrow A_n}}{A_1, \dots, A_n \Rightarrow A_1, \dots, A_n}$$

A continuación, damos la definición de consecuencia sintáctica. Sean  $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}$ :

**Definición 12.**  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CCL}}} \Delta$  si y sólo si, para todo subconjunto finito  $\Delta'$  de  $\Delta$  hay algún subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tal que  $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$  es derivable en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ .

Esta definición difiere de las definiciones ortodoxas de consecuencia sintáctica. Las definiciones en cuestión asumen el enfoque disyuntivo a las conclusiones múltiples; luego, estipulan que  $\Gamma \vdash \Delta$  si y sólo si para *algún*  $\delta \in \Delta$  hay un subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tal que el seciente  $\Gamma' \Rightarrow \delta$  es derivable en el cálculo (cf. Boolos et al., 2002, p. 169). Pero una

definición de este último tipo resulta incorrecta para **CCL**, en el sentido técnico de que devuelve una noción de consecuencia sintáctica que valida más cosas que su correspondiente noción de consecuencia semántica,  $\models_{\text{CCL}}$ . En cambio, la Definición 12 da lugar a una noción de consecuencia sintáctica que, como veremos, es correcta y completa.

Antes de exponer el resultado de correspondencia, presentamos dos nociones que permitirán extraer un corolario interesante.

**Definición 13.** Sea **L** una lógica definida por medios semánticos, y  $R$  una regla.

- $R$  es *globalmente válida* en **L** si y sólo si, para toda instancia de  $R$  se cumple que, si sus premisas son todas válidas en **L**, su conclusión también lo es.
- $R$  es *localmente válida* en **L** si y sólo si para toda instancia de  $R$  se cumple que, para toda valuación admisible, si la valuación satisface todas las premisas de la regla, satisface la conclusión.

(En donde una valuación *satisface* un seciente  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  en una lógica dada si y sólo no es un contraejemplo a la validez del argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  en esa lógica.)

En términos intuitivos, la validez global se entiende como preservación de validez entre las premisas y la conclusión de todas las instancias de la regla; la validez local como preservación de satisfacción. Un hecho a destacar es que la noción (modelo-teórica) de validez global *coincide* con la noción (prueba-teórica) de admisibilidad: si  $\mathcal{S}_{\mathbf{L}}$  es un cálculo correcto y completo para una lógica **L**, entonces una regla  $R$  es admisible en  $\mathcal{S}_{\mathbf{L}}$  si y sólo si es globalmente válida en **L** (véase, v.g. Da Ré et al., 2021).

Ahora sí,

**Teorema 9.**  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CCL}}} \Delta$

*Demostración.* Dejamos corrección como ejercicio, y probamos completitud.

Supongamos  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$ . Primero, asumamos  $\Delta = \emptyset$ . Dado cualquier subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , el seciente  $\Gamma' \Rightarrow \emptyset$  es derivable en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  por medio de la regla  $R_{\emptyset}$ ; luego,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CCL}}} \Delta$ . Segundo, asumamos  $\Delta \neq \emptyset$ . Para cualquier  $\delta \in \Delta$ ,  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \delta$  (por el Hecho 3), y entonces  $\Gamma \models_{\text{CL}} \delta$  (por el Hecho 6), y  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CL}}} \delta$  (por la completitud de  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$ ), y por último  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CCL}}} \delta$  (porque toda regla de  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$  es una regla de  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ ). Luego, sea  $\Delta'$  cualquier

subconjunto finito de  $\Delta$ , y supongamos que los elementos de  $\Delta'$  son  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . Sabemos que existe una secuencia  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$  tal que, para cada  $\delta_i$  en  $\Delta'$ ,  $\mathcal{D}_i$  es una  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ -derivación del seciente  $\Gamma_i \Rightarrow \delta_i$ , en donde  $\Gamma_i$  es algún subconjunto finito de  $\Gamma$ . Por lo tanto, consideremos el siguiente árbol de prueba esquemático:

$$\mathcal{S}\text{-M} \frac{\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & \dots & \mathcal{D}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_1 \Rightarrow \delta_1 & \dots & \Gamma_n \Rightarrow \delta_n \end{array}}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \delta_1, \dots, \delta_n}$$

Como cada  $\Gamma_i$  es finito, también la unión de todas las  $\Gamma_i$ s es finita. Así, tenemos una  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ -derivación del seciente  $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ , para algún subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ . Pero nuestro  $\Delta'$  había sido arbitrario. Por lo tanto,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CCL}}} \Delta$ .  $\square$

**Corolario 10.** *Las reglas Cut, RaW y*

$$\text{Tr} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Delta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$$

*son todas admisibles en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ .*

*Demostración.* Se sigue de manera inmediata del Teorema 9, el Hecho 4 y la coincidencia entre validez global y admisibilidad.  $\square$

Para terminar este apartado, analizo brevemente una extensión de  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  que tiene interés filosófico, y también nos será útil en términos técnicos:<sup>5</sup>

**Definición 14.** Sea  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}^+$  el cálculo que se obtiene a partir de  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  reemplazando  $\text{R}\emptyset$  por  $\text{RaW}$  y  $\text{Gem-at}$  por  $\text{Gem}$ .

En  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}^+$ ,  $\text{R}\emptyset$  es fácilmente derivable:<sup>6</sup>

$$\text{RaW} \frac{\text{ID} \frac{\Gamma \Rightarrow \Gamma}{\Gamma \Rightarrow \Gamma}}{\Gamma \Rightarrow \emptyset}$$

Por su parte, las reglas  $\text{Tr}$  y  $\text{Cut}$  son ya no sólo admisibles, sino derivables también.

Comencemos con  $\text{Tr}$ . Primero, notamos que la regla

<sup>5</sup>Con ‘extensión’ me refiero a que contiene todas las reglas de  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ . Los secientes probables en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  y  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}^+$  son los mismos, dado que ambos sistemas son correctos y completos respecto de  $\models_{\text{CCL}}$ .

<sup>6</sup>Nótese que la regla  $\text{ID}$  está disponible en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}^+$ , porque su derivación en  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  no apela a la regla  $\text{R}\emptyset$ .



### 1.2.2. Deducción Natural

Un *cálculo de deducción natural tipo Gentzen* es un sistema deductivo no axiomático, cuyas reglas operan sobre fórmulas y en el que, a falta de axiomas, se usan asunciones.

**Definición 15.** Si  $\mathcal{N}_L$  es un cálculo de deducción natural tipo Gentzen, una regla de  $\mathcal{N}_L$  es de la forma

$$R \frac{[A_1] \quad \cdots \quad [A_n] \quad B_1 \quad \cdots \quad B_n}{C}$$

en donde  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n, C$  son fórmulas esquemáticas, y una expresión del tipo  $[A]$  se lee como sigue: un número arbitrario, quizás nulo, de ocurrencias de  $A$  podría funcionar en la aplicación de la regla como asunción. Decimos que  $R$  es el *nombre* de la regla,  $B_1, \dots, B_n$  son las *premisas*,  $A_1, \dots, A_n$  son las *asunciones*, y  $C$  es la *conclusión*.

A efectos de brindar un cálculo de deducción natural para CCL, usamos la misma estrategia que con los secuentes, esto es, comenzamos exhibiendo un sistema para la lógica clásica de conclusiones simples, CL. Se trata del fragmento proposicional del sistema NK presentado por Gentzen (1934–35); aquí lo denominamos  $\mathcal{N}_{CL}$ .

**Definición 16.** El sistema  $\mathcal{N}_{CL}$  está determinado por las siguientes reglas:

$$\begin{array}{ll} \vee\text{-I} \frac{A(B)}{A \vee B} & \vee\text{-E} \frac{A \vee B \quad [A] \quad [B]}{C} \\ \wedge\text{-I} \frac{A \quad B}{A \wedge B} & \wedge\text{-E} \frac{A \wedge B}{A(B)} \\ \rightarrow\text{-I} \frac{[A] \quad B}{A \rightarrow B} & \rightarrow\text{-E} \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \\ \perp\text{-E} \frac{\perp}{C} & \text{LEM} \frac{}{A \vee \neg A} \end{array}$$

Vale la pena mencionar que las reglas habituales de la negación,

$$\neg\text{-I} \frac{[A] \quad \perp}{\neg A} \quad \neg\text{-E} \frac{A \quad \neg A}{\perp}$$

no son más que instancias de las reglas  $\rightarrow\text{-I}$  y  $\rightarrow\text{-E}$ , respectivamente.

A continuación, la idea es modificar  $\mathcal{N}_{\text{CL}}$  y obtener un cálculo para CCL. Pero antes, es preciso que hagamos una leve innovación sintáctica. Diremos que un *cálculo de deducción natural de conclusiones múltiples* es un sistema deductivo similar en todo a un cálculo de deducción natural tipo Gentzen, salvo por el hecho de que sus reglas operan, ya no sólo sobre fórmulas, sino también sobre *conjuntos* de fórmulas.

**Definición 17.** Si  $\mathcal{N}_{\text{L}}$  es un cálculo de deducción natural de conclusiones múltiples, una regla de  $\mathcal{N}_{\text{L}}$  es de la forma

$$R \frac{\Gamma_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \quad \frac{[A_1] \quad \cdots \quad [A_n]}{B_1 \quad \cdots \quad B_n}}{\Delta}$$

en donde  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Delta$  son conjuntos arbitrarios y finitos de fórmulas. Decimos que cada  $\Gamma_i$  es una de las *premisas* de la regla, y  $\Delta$  es su *conclusión*. Todas las otras expresiones se entienden como en una regla para un cálculo tipo Gentzen.

Ahora sí, presentamos nuestro cálculo para CCL, al que denominamos  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ :

**Definición 18.** El sistema  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$  resulta de extender  $\mathcal{N}_{\text{CL}}$  con las reglas

$$\emptyset\text{-I} \frac{\Gamma}{\emptyset} \qquad \mathcal{N}\text{-M} \frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{\{A_1, \dots, A_n\}}$$

(En donde la etiqueta  $\mathcal{N}\text{-M}$  responde a “ $\mathcal{N}$ -Merge”.)

La lectura intuitiva de estas reglas debería ser bastante simple, gracias a lo ya discutido en el apartado 1.2.1 sobre secuentes. La regla  $\emptyset\text{-I}$  permite concluir el conjunto vacío a partir de cualquier conjunto finito, quizás vacío, de premisas. La regla  $\mathcal{N}\text{-M}$  permite ‘reunir’ cualquier cantidad arbitraria de premisas en una única conclusión colectiva.

**Definición 19.** Si  $\Delta$  y  $\Gamma$  son conjuntos finitos de fórmulas, una  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ -derivación de  $\Delta$  a partir de  $\Gamma$  es una  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ -derivación de la conclusión  $\Delta$  cuyas premisas están todas en  $\Gamma$ .

Para ilustrar, el árbol

$$\begin{array}{c} \rightarrow\text{-E} \frac{p \quad p \rightarrow (q \rightarrow r)}{q \rightarrow r} \quad q \quad \frac{p \quad p \rightarrow (q \rightarrow r)}{q \rightarrow r} \rightarrow\text{-E} \\ \rightarrow\text{-E} \frac{\quad}{r} \quad \mathcal{N}\text{-M} \frac{\quad}{\{r, (q \rightarrow r)\}} \end{array}$$

es una  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ -derivación de  $\{r, (q \rightarrow r)\}$  a partir de  $\{p, q, (p \rightarrow (q \rightarrow r))\}$ . A su vez,

$$\emptyset\text{-I} \frac{}{\emptyset}$$

es una  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ -derivación de  $\emptyset$  a partir de  $\emptyset$ , porque leemos los nodos en blanco como denotando al conjunto vacío.

Para terminar,

**Definición 20.**  $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_{\text{CCL}}} \Delta$  si y sólo si, para todo subconjunto finito  $\Delta'$  de  $\Delta$  hay alguna  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ -derivación de  $\Delta'$  a partir de  $\Gamma$ .

Otra vez, esta definición se aleja un poco de la ortodoxia, en el mismo sentido y por las mismas razones que las discutidas en el apartado 1.2.1. A diferencia de las definiciones usuales, no pedimos sólo que *algún* subconjunto finito de  $\Delta$  sea derivable a partir de  $\Gamma$ , sino que *todo* subconjunto finito de  $\Delta$  lo sea.

**Teorema 11.**  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_{\text{CCL}}} \Delta$

*Demostración.* Dejamos corrección como ejercicio, y probamos completitud.

La prueba de completitud para  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$  es bastante similar, en espíritu, a la correspondiente prueba para  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$ . Supongamos que  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$ . Primero, asumamos  $\Delta = \emptyset$ . Dado cualquier subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ ,  $\emptyset$  es derivable a partir de  $\Gamma'$  usando la regla  $\text{I}\emptyset$ . Luego,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_{\text{CCL}}} \Delta$ . Segundo, supongamos que  $\Delta \neq \emptyset$ . Para cualquier  $\delta \in \Delta$ ,  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \delta$  (por el Hecho 3), y entonces  $\Gamma \models_{\text{CL}} \delta$  (por el Hecho 6), y  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CL}}} \delta$  (por la completitud de  $\mathcal{N}_{\text{CL}}$ ), y por último  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{CCL}}} \delta$  (porque toda regla en  $\mathcal{N}_{\text{CL}}$  está en  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ ). Luego, sea  $\Delta'$  un subconjunto finito de  $\Delta$ , y supongamos que los elementos de  $\Delta'$  son  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . Sabemos que existe una secuencia  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$  tal que, para cada  $\delta_i$  en  $\Delta'$ ,  $\mathcal{D}_i$  es una  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ -derivación de  $\delta_i$  a partir de  $\Gamma$ . Por lo tanto, consideremos el siguiente árbol esquemático:

$$\mathcal{N}\text{-M} \frac{\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \dots & \Gamma_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}_1 & \dots & \mathcal{D}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_1 & \dots & \delta_n \end{array}}{\delta_1, \dots, \delta_n}$$

El árbol constituye una  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ -derivación de  $\Delta'$  a partir de  $\Gamma$ . Pero nuestro  $\Delta'$  había sido arbitrario. Por lo tanto,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_{\text{CCL}}} \Delta$ . □

Al igual que antes, cabe considerar una extensión interesante del cálculo  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ .

**Definición 21.** Sea  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}^+$  el cálculo que se obtiene a partir de  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$  reemplazando  $\emptyset\text{-I}$  por la regla de ‘anti-Weakening’:

$$\text{aW} \frac{\Gamma, \Sigma}{\Gamma}$$

Nótese que  $\emptyset\text{-I}$  es un caso particular de aW, a saber, aquél en que  $\Gamma = \emptyset$ . Otra vez, podemos entender a las reglas aW y  $\mathcal{N}\text{-M}$  como, respectivamente, reglas de introducción y eliminación para la notación conjuntística.

### 1.3. Primer Orden

En este trabajo, la mayor parte mi exploración técnica se restringe a un lenguaje proposicional. La razón es que los argumentos filosóficos que ofrezco en la Parte II no dependen de fenómenos privativos de un lenguaje de primer orden. Aún así, considero relevante mostrar cómo se aplica la lectura conjuntivas de las conclusiones múltiples a la lógica clásica de primer orden .

*El lenguaje.* Trabajamos con un lenguaje estándar. Usamos  $\mathcal{L}_{\text{PO}}$  (por ‘Primer Orden’) para referirnos tanto al lenguaje como al conjunto de sus fórmulas—otra vez, apelamos a la caridad para la desambiguación. Asumimos conjuntos enumerables de constantes, variables, y letras de predicado  $n$ -ádicas para cada  $n \in \mathbb{N}$ . (Omitimos la relación de identidad y los símbolos de función para simplificar la exposición, pero nada depende de eso.) Escribimos  $A[c/x]$  para denotar la fórmula que resulta de reemplazar las apariciones libres de la variable  $x$  por la constante  $c$  en la fórmula  $A$ . Las constantes lógicas son las mismas de  $\mathcal{L}$ , más el cuantificador existencial  $\exists$ ; definimos  $\forall x A$  como  $\neg \exists x \neg A$ .

Comenzamos con la Teoría de Modelos. Primero, repongo la semántica estándar:

**Definición 22.** Una *interpretación clásica*  $\mathcal{M}$  para  $\mathcal{L}_{\text{PO}}$  es un par  $\langle D, I \rangle$ , en donde  $D$  es un conjunto no vacío y  $I$  es una función tal que:

- (i) Si  $a$  es una constante de  $\mathcal{L}_{\text{PO}}$ ,  $I(a) \in D$ ;
- (ii) Si  $P$  es una letra de predicado  $n$ -ádica,  $I(P) \subseteq D^n$ .

**Definición 23.** Una *asignación* es una función  $\alpha$  tal que, si  $x$  es una variable de  $\mathcal{L}_{\text{PO}}$ , entonces  $\alpha(x) \in D$ . Un *término* es cualquier constante o variable. La *denotación* de un término  $t$  en una interpretación  $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$  bajo una asignación  $\alpha$ , abreviada  $\mathcal{M}_\alpha(t)$ , es  $I(t)$  si  $t$  es una constante, y es  $\alpha(t)$  si  $t$  es una variable. Si  $\alpha$  es una asignación, una  *$x$ -variante* de  $\alpha$  es una asignación  $\alpha'$  igual en todo a  $\alpha$  salvo, quizás, en que asigna un objeto diferente a la variable  $x$ .

**Definición 24.** El *valor* de una fórmula  $A$  en una interpretación  $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$  bajo una asignación  $\alpha$ , abreviado  $\mathcal{M}_\alpha(A)$ , se define como sigue:

- (i)  $\mathcal{M}_\alpha(Pt_1 \dots t_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle \mathcal{M}_\alpha(t_1), \dots, \mathcal{M}_\alpha(t_n) \rangle \in I(P) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- (ii)  $\mathcal{M}_\alpha(\perp) = 0$
- (iii)  $\mathcal{M}_\alpha(\neg A) = 1 - \mathcal{M}_\alpha(A)$
- (iv)  $\mathcal{M}_\alpha(A \vee B) = \text{máx}(\mathcal{M}_\alpha(A), \mathcal{M}_\alpha(B))$
- (v)  $\mathcal{M}_\alpha(A \wedge B) = \text{mín}(\mathcal{M}_\alpha(A), \mathcal{M}_\alpha(B))$
- (vi)  $\mathcal{M}_\alpha(A \rightarrow B) = \text{máx}(1 - \mathcal{M}_\alpha(A), \mathcal{M}_\alpha(B))$
- (vii)  $\mathcal{M}_\alpha(\exists x A) = \text{máx}(\{\mathcal{M}_{\alpha'}(A) : \alpha' \text{ es una } x\text{-variante de } \alpha\})$ .

Usamos  $\text{Val}_{\text{PO}}$  para denotar el conjunto de todas las interpretaciones clásicas de  $\mathcal{L}_{\text{PO}}$ , y  $\mathcal{M}_\alpha(\Gamma)$  para el conjunto  $\{\mathcal{M}_\alpha(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$

A continuación, presento las definiciones de validez de tres lógicas: la clásica de conclusiones simples, **FOL** (por ‘First Order Logic’), la de conclusiones múltiples estándar, **FOML**, y la de conclusiones múltiples conjuntivas, **FOCL**—las etiquetas se autoexplican.

**Definición 25.** La relación  $\models_{\text{FOL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\text{PO}}) \times \mathcal{L}_{\text{PO}}$  se define como sigue:

- $\Gamma \models_{\text{FOL}} A$  si y sólo si, para todo  $\mathcal{M}$  en  $\text{Val}_{\text{PO}}$ , y toda asignación  $\alpha$ ,
- si  $\mathcal{M}_\alpha(\Gamma) \subseteq \{1\}$ , entonces  $\mathcal{M}_\alpha(A) = 1$

**Definición 26.** La relación  $\models_{\text{FOML}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\text{PO}}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\text{PO}})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{FOML}} \Delta \text{ si y sólo si, para todo } \mathcal{M} \text{ en } \text{Val}_{\text{PO}}, \text{ y toda asignación } \alpha, \\ \text{si } \mathcal{M}_\alpha(\Gamma) \subseteq \{1\}, \text{ entonces } \mathcal{M}_\alpha(\Delta) \not\subseteq \{0\}.$$

**Definición 27.** La relación  $\models_{\text{FOCL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\text{PO}}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\text{PO}})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{FOCL}} \Delta \text{ si y sólo si, para todo } \mathcal{M} \in \text{Val}_{\text{PO}}, \text{ y toda asignación } \alpha, \\ \text{si } \mathcal{M}_\alpha(\Gamma) \subseteq \{1\}, \text{ entonces } \mathcal{M}_\alpha(\Delta) \subseteq \{1\}.$$

Es fácil verificar que **FOCL** satisface resultados análogos a los Hechos 3–8 para **CCL**:  $\Gamma \models_{\text{FOCL}} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \models_{\text{FOCL}} B$  para cada  $B$  en  $\Delta$  (Hecho 3); la relación  $\models_{\text{FOCL}}$  es reflexiva, transitiva, y valida globalmente corte, debilitamiento izquierdo y antidebilitamiento derecho (Hecho 4), aunque invalida debilitamiento derecho (Hecho 5); la relación  $\models_{\text{FOL}}$  es una restricción de  $\models_{\text{FOCL}}$  a argumentos cuyo conjunto de conclusiones tiene un único elemento (Hecho 6); las relaciones  $\models_{\text{FOCL}}$  y  $\models_{\text{FOML}}$  no están incluidas una en la otra (Hecho 7); por último,  $\models_{\text{FOCL}}$  es compacta, en el sentido de que  $\Gamma \models_{\text{FOCL}} \Delta$  si y sólo si para todo subconjunto finito  $\Delta'$  de  $\Delta$ , hay algún subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tal que  $\Gamma' \models_{\text{FOCL}} \Delta'$  (Hecho 8). En este sentido, la aplicación a primer orden del enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples no trae sorpresas.

Pasemos ahora a la Teoría de la Prueba. Daremos un cálculo de secuentes correcto y completo para **FOCL**. Primero, exhibimos  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ , un conocido cálculo para la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **FOML** (Gentzen, 1934–35):<sup>7</sup>

**Definición 28.** El cálculo  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$  está determinado por las siguientes reglas:

$$\begin{array}{ll} \text{Id}_{\text{LK}} \frac{}{A \Rightarrow A} & \text{Cut}_{\text{LK}} \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \\ \text{LW}_{\text{LK}} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} & \text{RW}_{\text{LK}} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta} \\ \text{LV}_{\text{LK}} \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} & \text{RV}_{\text{LK}} \frac{\Gamma \Rightarrow A(B), \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} \end{array}$$

<sup>7</sup>Para conocedores: entre mi presentación y la de Gentzen hay dos pequeñas diferencias, ambas irrelevantes en lo que toca a secuentes probables. La primera es que, como trabajamos con conjuntos, omito las reglas de contracción e intercambio. La segunda es que uso una regla aditiva del condicional a la izquierda mientras que la original es multiplicativa.

$$\begin{array}{l}
L\wedge_{LK} \frac{\Gamma, A(B) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad R\wedge_{LK} \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} \\
L\rightarrow_{LK} \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} \qquad R\rightarrow_{LK} \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} \\
L\neg_{LK} \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad R\neg_{LK} \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} \\
L\exists_{LK} \frac{\Gamma, A[a/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad a \text{ no en } \Gamma, \Delta \text{ o } A \qquad R\exists_{LK} \frac{\Gamma, \Rightarrow A[a/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x), \Delta}
\end{array}$$

Ahora, extendemos nuestro cálculo proposicional  $\mathcal{S}_{CCL}^+$  con reglas para los cuantificadores. Denominamos al sistema resultante  $\mathcal{S}_{FOCL}$ .

**Definición 29.**  $\mathcal{S}_{FOCL}$  es el cálculo que se obtiene a partir de  $\mathcal{S}_{CCL}^+$  agregando  $L\exists_{LK}$  y

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow B_m \vee \dots \vee A[a/t] \vee \dots \vee B_n}{\Gamma \Rightarrow B_m \vee \dots \vee \exists x Ax \vee \dots \vee B_n} \quad 0 \leq m, n$$

Definimos consecuencia sintáctica de manera similar al caso proposicional, a saber:

**Definición 30.**  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{FOCL}} \Delta$  si y sólo si, para todo subconjunto finito  $\Delta'$  de  $\Delta$  hay algún subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tal que el secunte  $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$  es derivable en  $\mathcal{S}_{FOCL}$ .

A continuación, mostramos que  $\mathcal{S}_{FOCL}$  es correcto y completo. Para facilitar la prueba, comenzamos notando que las siguientes reglas son todas derivables en el cálculo:

$$\begin{array}{l}
DS_1 \frac{\Gamma \Rightarrow A \vee B}{\Gamma, \neg A \Rightarrow B} \qquad DS_2 \frac{\Gamma \Rightarrow A \vee B}{\Gamma, \neg B \Rightarrow A} \qquad (*) \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A \vee B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \\
DT_1 \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow \neg A \vee B} \qquad DT_2 \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B \vee \neg A}
\end{array}$$

(Las etiquetas ‘DT’ y ‘DS’ son por ‘Deduction Theorem’ y ‘Disjunctive Sillogism’, respectivamente.) Reproducimos aquí solo las derivaciones de  $DS_1$ ,  $DT_1$  y (\*):

$$\text{Cut} \frac{\Gamma \Rightarrow A \vee B \quad \text{L}\vee \frac{\text{EFSQ} \frac{A \Rightarrow A}{A, \neg A \Rightarrow B} \quad \text{LW} \frac{B \Rightarrow B}{B, \neg A \Rightarrow B}}{A \vee B, \neg A \Rightarrow B}}{\Gamma, \neg A \Rightarrow B} \quad \boxed{DS_1}$$

$$\begin{array}{c}
\text{R}\rightarrow \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} \\
\text{Cut} \frac{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B} \\
\text{L}\rightarrow^* \frac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, A \rightarrow B \Rightarrow B} \\
\text{R}\vee \frac{A, A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B}{A, A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} \\
\text{Gem} \frac{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B}{A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} \\
\text{LW} \frac{\neg A \Rightarrow \neg A}{\neg A, A \rightarrow B \Rightarrow \neg A} \\
\text{R}\vee \frac{\neg A, A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B}{\neg A, A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B} \quad \boxed{\text{DT}_1} \\
\hline
\Gamma \Rightarrow \neg A \vee B
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
\text{DT} \frac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A \vee \neg A} \\
\text{DS} \frac{\Rightarrow A \vee \neg A}{\neg \neg A \Rightarrow A} \\
\text{R}\vee \frac{\neg \neg A \Rightarrow A}{\neg \neg A \Rightarrow A \vee B} \\
\text{L}\vee \frac{\neg \neg A \Rightarrow A \vee B}{\neg \neg A \vee B \Rightarrow A \vee B} \\
\text{Tr} \frac{\Gamma \Rightarrow \neg \neg A \vee B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \\
\text{R}\vee \frac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A \vee B} \quad \boxed{(*)}
\end{array}$$

Con las anteriores reglas a nuestra disposición, mostramos el siguiente Lema, que nos resultará útil en la prueba de completitud:

**Lema 12.** *Si un seciente  $\Gamma \Rightarrow A$  es derivable en  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ , es derivable en  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ .*

*Demostración.* Sea  $\Gamma \Rightarrow A$  un seciente derivable en  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ , y sea  $\mathcal{D}$  una  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ -derivación del seciente en cuestión. Primero, definimos una función de ‘traducción’  $\tau$  que toma secientes y devuelve secientes, como sigue:

$$\tau(\Gamma \Rightarrow \Delta) = \Gamma \Rightarrow \bigvee(\Delta)$$

en donde  $\bigvee(\Delta)$  denota la oración  $\delta_1 \vee \dots \vee \delta_n$  tal que  $\delta_1, \dots, \delta_n$  son todos los miembros de  $\Delta$ . (Sabemos que  $\tau$  existe porque los secientes, por definición, tienen una cantidad finita tanto de premisas como de conclusiones.) Si  $\mathcal{R}$  es una regla de  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ , decimos que su traducción a  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ , denotada por  $\tau(\mathcal{R})$ , es la regla que resulta de reemplazar cada seciente  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  en  $\mathcal{R}$  con  $\tau(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ .

Segundo, mostramos que, para toda regla o axioma  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ ,  $\tau(\mathcal{R})$  es derivable en  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ . Los casos de  $\text{Id}_{\text{LK}}$ ,  $\text{LW}_{\text{LK}}$ ,  $\text{L}\vee_{\text{LK}}$ ,  $\text{R}\vee_{\text{LK}}$ ,  $\text{L}\exists_{\text{LK}}$  y  $\text{R}\exists_{\text{LK}}$  son todos triviales, porque las traducciones de estos axiomas o reglas son instancias de los correspondientes axiomas o reglas de  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ . Los casos de  $\text{RW}_{\text{LK}}$ ,  $\text{L}\wedge_{\text{LK}}$ ,  $\text{L}\neg_{\text{LK}}$  y  $\text{R}\neg_{\text{LK}}$  son *quasi* triviales. La traducción de  $\text{RW}_{\text{LK}}$  se obtiene mediante aplicaciones repetidas de  $\text{R}\vee$ . La de  $\text{L}\wedge_{\text{LK}}$  mediante  $\text{LW}$  y  $\text{L}\wedge$ . Las traducciones de  $\text{L}\neg_{\text{LK}}$  y  $\text{R}\neg_{\text{LK}}$  son instancias de  $\text{DS}$  y  $\text{DT}$ , respectivamente. De modo que nos quedan cuatro reglas:  $\text{Cut}_{\text{LK}}$ ,  $\text{R}\wedge_{\text{LK}}$ ,  $\text{L}\rightarrow_{\text{LK}}$  y  $\text{R}\rightarrow_{\text{LK}}$ .

Exhibimos en orden las traducciones de estas reglas, acompañadas de sus respectivas derivaciones en  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ . Usamos  $\neg(\Delta)$  para denotar al conjunto  $\{\neg B : B \in \Delta\}$ .

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee(\Delta) \quad \Gamma', A \Rightarrow \bigvee(\Delta')}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')} \boxed{\tau(\text{Cut}_{\text{LK}})}$$

$$\begin{array}{c} \text{DS} \frac{\Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee(\Delta)}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \bigvee(\Delta)} \\ \text{RV} \frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')}{\Gamma, \Gamma', \neg A \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')} \\ \text{LW} \frac{\Gamma, \Gamma', \neg A \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')} \\ \text{Gem} \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{RV} \frac{\Gamma', A \Rightarrow \bigvee(\Delta')}{\Gamma', A \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')} \\ \text{LW} \frac{\Gamma', A \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow \bigvee(\Delta) \vee \bigvee(\Delta')} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee(\Delta) \quad \Gamma \Rightarrow B \vee \bigvee(\Delta)}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B) \vee \bigvee(\Delta)} \boxed{\tau(\text{R}\wedge\text{LK})}$$

$$\begin{array}{c} \text{DS} \frac{\Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee(\Delta)}{\Gamma, \neg(\Delta) \Rightarrow A} \quad \text{DS} \frac{\Gamma \Rightarrow B \vee \bigvee(\Delta)}{\Gamma, \neg(\Delta) \Rightarrow B} \\ \text{R}\wedge \frac{\Gamma, \neg(\Delta) \Rightarrow A \quad \Gamma, \neg(\Delta) \Rightarrow B}{\Gamma, \neg(\Delta) \Rightarrow A \wedge B} \\ \text{DT} \frac{\Gamma, \neg(\Delta) \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B) \vee \bigvee(\neg(\neg(\Delta)))} \\ (*) \frac{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B) \vee \bigvee(\neg(\neg(\Delta)))}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B) \vee \bigvee(\Delta)} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee(\Delta) \quad \Gamma, B \Rightarrow \bigvee(\Delta)}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \bigvee(\Delta)} \boxed{\tau(\text{L}\rightarrow\text{LK})}$$

$$\begin{array}{c} \text{DS} \frac{\Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee(\Delta)}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \bigvee(\Delta)} \quad \text{L}\rightarrow^* \frac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, A \rightarrow B \Rightarrow B} \quad \text{RV} \frac{\neg A \Rightarrow \neg A}{\neg A \Rightarrow \neg A \vee B} \\ \text{LW} \frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow \bigvee(\Delta) \quad \Gamma, B \Rightarrow \bigvee(\Delta)}{\Gamma, \neg A \vee B \Rightarrow \bigvee(\Delta)} \quad \text{RV} \frac{\neg A \Rightarrow \neg A}{\neg A \Rightarrow \neg A \vee B} \\ \text{LW} \frac{\Gamma, \neg A \vee B \Rightarrow \bigvee(\Delta) \quad A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \bigvee(\Delta)} \\ \text{Cut} \frac{\Gamma, \neg A \vee B \Rightarrow \bigvee(\Delta) \quad A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \bigvee(\Delta)} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B \vee \bigvee(\Delta)}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B \vee \bigvee(\Delta)} \boxed{\tau(\text{R}\rightarrow\text{LK})}$$

$$\begin{array}{c} \text{EFSQ} \frac{A \Rightarrow A}{A, \neg A \Rightarrow B} \quad \text{LW} \frac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B} \\ \text{R}\rightarrow \frac{\Gamma, A \Rightarrow B \vee \bigvee(\Delta)}{\Gamma \Rightarrow (\neg A \vee B) \vee \bigvee(\Delta)} \quad \text{R}\rightarrow \frac{A, B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A \rightarrow B} \\ \text{LW} \frac{\Gamma \Rightarrow (\neg A \vee B) \vee \bigvee(\Delta) \quad B \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B) \vee \bigvee(\Delta)} \\ \text{L}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow (\neg A \vee B) \vee \bigvee(\Delta) \quad \neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B) \vee \bigvee(\Delta)} \\ \tau(\text{Cut}_{\text{LK}}) \frac{\Gamma \Rightarrow (\neg A \vee B) \vee \bigvee(\Delta) \quad \neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B) \vee \bigvee(\Delta)} \end{array}$$

Por último, volvamos a nuestra  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ -derivación  $\mathcal{D}$  del seciente  $\Gamma \Rightarrow A$ . Definamos  $\tau(\mathcal{D})$  como el árbol que resulta a partir de  $\mathcal{D}$  al reemplazar cada seciente  $\Sigma \Rightarrow \Delta$  por su traducción  $\tau(\Sigma \Rightarrow \Delta)$ . Como las traducciones de todos los axiomas y reglas de  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$  son derivables en  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ , sabemos que  $\tau(\mathcal{D})$  es una  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ -derivación del seciente  $\tau(\Gamma \Rightarrow A) = \Gamma \Rightarrow A$ , y hemos probado nuestro Lema.  $\square$

Con el Lema 12, es simple mostrar la correspondencia entre  $\models_{\text{FOCL}}$  y  $\vdash_{\mathcal{S}_{\text{FOCL}}}$ .

**Teorema 13.**  $\Gamma \models_{\text{FOCL}} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{FOCL}}} \Delta$

*Demostración.* Dejamos corrección como ejercicio, y probamos completitud.

Supongamos que  $\Gamma \models_{\text{FOCL}} \Delta$ . Asumamos, primero,  $\Delta = \emptyset$ . Entonces, para cualquier subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , el seciente  $\Gamma' \Rightarrow \emptyset$  se obtiene mediante ID y repetidas aplicaciones de RaW. Asumamos, entonces,  $\Delta \neq \emptyset$ . Para cualquier  $\delta \in \Delta$ ,  $\Gamma \models_{\text{FOCL}} \delta$  (por el análogo del Hecho 3), y entonces  $\Gamma \models_{\text{FOL}} \delta$  (por el análogo del Hecho 6), y  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{LK}}} \delta$  (por la completitud de  $\mathcal{S}_{\text{LK}}$ ), y por último  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{\text{FOCL}}} \delta$  (por el Lema 12). De aquí en más, la prueba es similar en todo a la prueba del Teorema 9, es decir: sabemos que para cualquier subconjunto finito  $\Delta'$  de  $\Delta$ , con elementos  $\delta'_1, \dots, \delta'_n$ , existe una secuencia  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$  tal que cada  $\mathcal{D}_i$  es una  $\mathcal{S}_{\text{FOCL}}$ -derivación de  $\delta'_i$ , con  $0 \leq i \leq n$ , a partir de algún subconjunto finito de  $\Gamma$ ; fusionamos todas las derivaciones por medio de S-M y obtenemos una derivación de  $\Delta'$  a partir de algún subconjunto finito de  $\Gamma$ .  $\square$

Con el anterior resultado terminamos nuestro abordaje de primer orden. Para simplificar la exposición, en lo que sigue hablo sólo de lógica proposicional. Sin embargo, los resultados técnicos más relevantes, y también la motivación filosófica, aplican todos a primer orden también. En la sección siguiente, analizamos una inquietud que podría surgir en torno a mi afirmación de que CCL es una generalización de la lógica clásica.

## 1.4. Metainferencias

En los últimos años, en el campo de la Lógica Filosófica ha cobrado gran importancia el estudio de las denominadas *metainferencias*. En términos informales, una metainferencia es un argumento cuyas premisas y conclusiones no son oraciones, sino argumentos a su vez. Para introducir el concepto de manera más precisa, damos un pequeño rodeo por la noción más familiar de ‘inferencia’.

**Definición 31.** Una *inferencia* en  $\mathcal{L}$  es un par  $\langle \Gamma, \Delta \rangle$  tal que  $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}$ .

Denominamos  $\text{Inf}(\mathcal{L})$  al conjunto de todas las inferencias en  $\mathcal{L}$ . Para facilitar la lectura, a veces nos referimos a una inferencia  $\langle \Gamma, \Delta \rangle$  por medio de la expresión  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ . Nótese que nuestro uso del símbolo  $\Rightarrow$  es accesorio, y las inferencias no deben ser equiparadas con los secuentes: los secuentes deben tener una cantidad finita de premisas y/o conclusiones, las inferencias no. Ahora sí,

**Definición 32.** Una *metainferencia* en  $\mathcal{L}$  es un par  $\langle \Gamma, \Delta \rangle$  tal que  $\Gamma, \Delta \subseteq \text{Inf}(\mathcal{L})$ .

En términos técnicos, entonces, una metainferencia no es más que un par de conjuntos de inferencias. Para facilitar la lectura, a veces nos referiremos a una metainferencia  $\langle \Gamma, \Delta \rangle$  por medio de la expresión  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ .

En la literatura hay dos enfoques a la hora de definir validez para metainferencias. Los enfoques adaptan a contextos no esquemáticos las nociones de validez local y global que vimos para reglas (Sec. 1.2.1).<sup>8</sup> Empezamos presentando las definiciones para metainferencias de conclusiones simples, que son las más estudiadas:

**Definición 33.** Sea  $\mathbf{L}$  una lógica definida por medios semánticos

- La metainferencia  $\Gamma \Rightarrow \delta$  es *globalmente válida* en  $\mathbf{L}$ , abreviado  $\models_{\mathbf{L}}^g \Gamma \Rightarrow \delta$ , si y sólo si, si sus premisas son todas válidas en  $\mathbf{L}$ , su conclusión también lo es.
- La metainferencia  $\Gamma \Rightarrow \delta$  es *localmente válida* en  $\mathbf{L}$ , abreviado  $\models_{\mathbf{L}}^l \Gamma \Rightarrow \delta$ , si y sólo si, para toda valuación admisible, si la valuación satisface todas las premisas de la metainferencia, satisface la conclusión.

En donde la noción de satisfacción de inferencias se entiende de manera análoga a la de satisfacción de secuentes (cf. Sec. 1.2.1).

El estudio de las metainferencias ha motivado múltiples interrogantes filosóficos. Uno de esos interrogantes gira en torno a las condiciones de identidad entre lógicas. Existen sistemas como **ST** y **NC** (véase Sec. 2.1), que tienen las mismas inferencias válidas que la lógica clásica pero, a diferencia de esta última, pueden usarse para lidiar con paradojas semánticas y de la vaguedad; en particular, soportan una teoría de la verdad que es una

<sup>8</sup>Las reglas de un cálculo de secuentes son todas lo que se denomina *metainferencias esquemáticas*: objetos similares en todo a metainferencias, salvo porque, en lugar de oraciones o conjuntos de oraciones (como  $p$  o  $\{p, q\}$ ), encontramos letras esquemáticas con oraciones o conjuntos de oraciones en su rango (como  $A$  o  $\Gamma$ ). Para una definición precisa de metainferencia esquemática, véase Da Ré et al. (2021).

extensión conservativa de la lógica clásica y valida el Esquema-T irrestricto. Algunos autores (v.g. Cobreros et al., 2013; Ripley, 2012) han sostenido que tales sistemas *son* la lógica clásica—asumiendo, de manera implícita, que una lógica ha de ser identificada con el conjunto de sus inferencias válidas. Es sabido, sin embargo que lógicas como **ST** y **NC** invalidan localmente múltiples *metainferencias* válidas en lógica clásica. Varios autores (Barrio et al., 2015; Dicher y Paoli, 2019; Pynko, 2010) mostraron que, *dada* una traducción plausible que toma metainferencias y devuelve inferencias, las metainferencias localmente válidas en **ST** están de hecho en correspondencia uno a uno con las inferencias válidas de la lógica paraconsistente **LP**. Este fenómeno se ha considerado como una razón para pensar que, lejos de ser una mera presentación de la lógica clásica, **ST es LP**.

El problema de la identidad entre lógica está conectado con el presente trabajo, porque una de las afirmaciones que defiendo es que **CCL** no es más que una generalización de la lógica clásica de conclusiones simples. Es decir, sostengo que *es* la lógica clásica, en el sentido más fuerte que le cabe al término. Sin embargo, **CCL** tiene un comportamiento estructural, y por ende metainferencial, que se aleja mucho de la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**. Cabría, entonces, preguntarse lo siguiente. Dada alguna función de traducción plausible de metainferencias a inferencias, ¿se corresponden las metainferencias localmente válidas en **CCL** con las inferencias válidas en lógica clásica? ¿O quizás coinciden con las inferencias de algún otro sistema no clásico? En el segundo caso, mi pretensión de que **CCL** es la lógica clásica se vería, al menos, debilitada. Para disipar la anterior preocupación, en lo que sigue muestro que las metainferencias válidas en **CCL** de hecho se corresponden con las de la lógica clásica.

Comenzamos definiendo un método plausible para traducir inferencias en fórmulas. Por supuesto, nuestra función de traducción solo puede admitir en su dominio inferencias con conjuntos finitos de premisas y conclusiones. Luego, usamos  $\text{Inf}(\mathcal{L})^{\text{fin}}$  para denotar el conjunto de las inferencias  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  tales que  $\Gamma$  y  $\Delta$  son finitos.

**Definición 34.** Sea  $\tau : \text{Inf}(\mathcal{L})^{\text{fin}} \rightarrow \mathcal{L}$  la función tal que:

$$\tau(\Gamma \Rightarrow \Delta) = \bigwedge(\Gamma \cup \{\top\}) \rightarrow \bigwedge(\Delta \cup \{\top\})$$

en donde  $\bigwedge(\Sigma)$  es la oración  $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n$  tal que  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  son todas las fórmulas en  $\Sigma$ , y  $\top$  se define como  $\neg \perp$ . Si  $\Psi$  es un conjunto de inferencias, usamos  $\tau(\Psi)$  para denotar el conjunto  $\{\tau(\psi) : \psi \in \Psi\}$ .

La expresión  $\top$  se entiende como denotando la verdad lógica. En términos intuitivos, entonces, nuestra función  $\tau$  traduce una inferencia por medio del enunciado condicional cuyo antecedente es la conjunción de la verdad lógica con las premisas, y cuyo consecuente es la conjunción de la verdad lógica con las conclusiones. La razón por la que aparece la verdad lógica es que, en caso de que una inferencia carezca de premisas o de conclusiones, es preciso que al menos una fórmula bien formada haga las veces de antecedente o consecuente de su traducción. La función  $\tau$  difiere en dos aspectos de las funciones de traducción usuales en la literatura. Primero, las funciones usuales devuelven un condicional en cuyo consecuente las conclusiones no están puestas en conjunción, sino en *disyunción*. Segundo, devuelven un condicional en cuyo consecuente no figura la verdad, sino la falsedad lógica,  $\perp$ . Ambas diferencias se explican con facilidad por el contraste entre los enfoques conjuntivo y disyuntivo a las conclusiones múltiples.<sup>9</sup> Luego, considero que  $\tau$  reúne los requisitos para ser considerada una función de traducción *plausible*.

Ahora, presentamos un Lema que será útil en nuestra prueba de correspondencia. Abreviamos la afirmación de que una valuación  $v$  satisface una inferencia  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  en una lógica  $\mathbf{L}$  escribiendo  $v \Vdash_{\mathbf{L}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ . Si  $\Psi$  es un conjunto de inferencias, escribimos  $v \Vdash_{\mathbf{L}} \Psi$  para decir que  $v \Vdash_{\mathbf{L}} \psi$  para cada  $\psi \in \Psi$ .

**Lema 14.** *Para cualquier  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  en  $\text{Inf}(\mathcal{L})^{\text{fin}}$ , y cualquier  $v \in \text{Val}$ ,  $v \Vdash_{\text{CCL}} \Gamma \Rightarrow \Delta$  si y sólo si  $v(\tau(\Gamma \Rightarrow \Delta)) = 1$ .*

*Demostración.*  $v \Vdash_{\text{CCL}} \Gamma \Rightarrow \Delta$  si y sólo si  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$  y  $v(\Delta) \not\subseteq \{1\}$  (por definición de  $\Vdash_{\text{CCL}}$ ), si y sólo si  $v(\bigwedge(\Gamma \cup \{\top\})) = 1$  y  $v(\bigwedge(\Delta \cup \{\top\})) = 0$  (por la semántica de  $\bigwedge$  y  $\top$ ), si y sólo si  $v(\bigwedge(\Delta \cup \{\top\}) \rightarrow \bigwedge(\Gamma \cup \{\top\})) = 0$  (por la semántica de  $\rightarrow$ ), si y sólo si  $v(\tau(\Gamma \Rightarrow \Delta)) = 0$  (por definición de  $\tau$ ).  $\square$

<sup>9</sup>Respecto de la segunda diferencia, nótese que, para el enfoque disyuntivo, un conjunto vacío de conclusiones es insatisfacible—nunca se cumple que *alguna* oración en el conjunto es verdadera.

En términos informales, el Lema 14 nos dice que una inferencia es satisfecha en CCL por una valuación si y sólo si su traducción es verdadera en esa valuación.

Por último, es preciso generalizar la noción de validez metainferencial expuesta más arriba de conclusiones simples a conclusiones múltiples. La manera usual de proceder es con una definición del tipo “La metainferencia tal y cual es localmente válida en una lógica dada si y sólo si, siempre que una valuación satisface todas las premisas, satisface *alguna* conclusión” (cf. Da Ré et al., 2020). Esta clase de definición, sin embargo, entra en clara tensión con la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples. Si las conclusiones múltiples en inferencias han de leerse de manera conjuntiva, y las metainferencias se entienden como un tipo especial de (o quizás, un pariente cercano de las) inferencias, ¿por qué habríamos de leer las conclusiones múltiples de nuestras metainferencias de manera disyuntiva? Propongo, entonces, la siguiente definición:

**Definición 35.** Sea  $L$  una lógica definida por medios semánticos. La metainferencia  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  es *localmente válida* en  $L$ , abreviado  $\models_L^\ell \Gamma \Rightarrow \Delta$ , si y sólo si, para toda valuación admisible, si la valuación satisface todas las  $\gamma \in \Gamma$ , satisface todas las  $\delta \in \Delta$ .

Ahora sí, nuestro resultado:

**Teorema 15.** Sea  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  tal que  $\Gamma, \Delta \subseteq \text{Inf}(\mathcal{L})^{\text{fin}}$ . Luego,  $\models_{\text{CCL}}^\ell \Gamma \Rightarrow \Delta$  si y sólo si  $\tau(\Gamma) \models_{\text{CCL}} \tau(\Delta)$ .

*Demostración.*  $\not\models_{\text{CCL}} \Gamma \Rightarrow \Delta$  si y sólo si hay una valuación clásica  $v$  tal que  $v \Vdash_{\text{CCL}} \Gamma$  y  $v \not\Vdash_{\text{CCL}} \Delta$  (por Def. 35), si y sólo si  $v(\tau(\Gamma)) \subseteq \{1\}$  y  $v(\tau(\Delta)) \not\subseteq \{1\}$  (por Lema 14), si y sólo si  $\tau(\Gamma) \not\models_{\text{CCL}} \tau(\Delta)$  (por definición de  $\models_{\text{CCL}}$ ).  $\square$

Es decir, las metainferencias localmente válidas de CCL se corresponden con sus inferencias válidas. Como caso particular, tenemos:

**Corolario 16.** Sea  $\Gamma \Rightarrow \delta$  tal que  $\Gamma, \{\delta\} \subseteq \text{Inf}(\mathcal{L})^{\text{fin}}$ . Luego,  $\models_{\text{CCL}}^\ell \Gamma \Rightarrow \delta$  si y sólo si  $\tau(\Gamma) \models_{\text{CL}} \tau(\delta)$ .

*Demostración.* Se sigue de manera inmediata del Teorema 15 y el Hecho 6.  $\square$

De esta manera, desaparece cualquier preocupación en torno a las posibles divergencias metainferenciales entre la lógica clásica de conclusiones simples y su contrapartida de conclusiones múltiples leídas de manera conjuntiva.

Para terminar el capítulo, mencionamos una aplicación interesante del enfoque conjuntivo. Cuando leemos las conclusiones múltiples de una metainferencia de manera disyuntiva, no es claro cómo hemos de entender la noción de validez global. A primera vista, parece tentadora la siguiente definición:

**Definición 36.** Sea  $\mathbf{L}$  una lógica definida por medios semánticos. La metainferencia  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  es *globalmente<sub>1</sub> válida* en  $\mathbf{L}$ , abreviado  $\models_{\mathbf{L}}^{\mathcal{G}_1} \Gamma \Rightarrow \Delta$ , si y sólo si, si sus premisas son todas válidas en  $\mathbf{L}$ , alguna de sus conclusiones también lo es.

La definición tiene una ventaja, y es que nos permite conservar nuestra lectura informal de la validez global como preservación de validez entre inferencias. Sin embargo, y como señalan Da Ré et al. (2021), no es del todo satisfactoria. En conclusiones simples, las valideces locales de una lógica constituyen un subconjunto propio de sus valideces globales. Este hecho, sin embargo, no se extiende a conclusiones múltiples bajo la noción de validez global<sub>1</sub>. Por ejemplo, la metainferencia

$$\frac{\emptyset}{p \Rightarrow \Rightarrow p} \quad (1)$$

es localmente válida pero globalmente<sub>1</sub> inválida en lógica clásica, dado que toda valuación satisface todas las premisas y al menos una de las conclusiones, pero, si bien todas las premisas son válidas, ninguna conclusión lo es. Esta consecuencia es indeseable porque, *prima facie*, el vínculo entre las nociones de validez global y local no debería variar de manera sustancial dependiendo de si trabajamos en conclusiones simples o múltiples. Los autores, entonces, recomiendan una definición diferente:

**Definición 37.** Sea  $\mathbf{L}$  una lógica definida por medios semánticos. La metainferencia  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  es *globalmente<sub>2</sub> válida* en  $\mathbf{L}$ , abreviado  $\models_{\mathbf{L}}^{\mathcal{G}_2} \Gamma \Rightarrow \Delta$ , si y sólo si, si sus premisas son todas válidas en  $\mathbf{L}$ , entonces toda valuación admisible satisface alguna de las conclusiones.

La definición es inmune al anterior problema, es decir, hace que también en conclusiones múltiples las valideces locales sean un subconjunto propio de las globales. Sin embargo,

creo que tampoco es del todo satisfactoria. La razón es que resulta incompatible con que leamos la validez global como preservación de validez entre inferencias. Esta consecuencia es indeseable, esta vez porque, *prima facie*, el hecho de si trabajamos con conclusiones simples o múltiples no debería afectar de manera sustancial nuestra lectura informal de la validez global. De esta manera, la noción de validez global no parece admitir definiciones plausibles en el enfoque disyuntivo.

Cuando leemos las conclusiones múltiples de una metainferencia de manera conjuntiva, el problema se disuelve. Consideremos la siguiente definición:

**Definición 38.** Sea  $L$  una lógica definida por medios semánticos. La metainferencia  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  es *globalmente válida* en  $L$ , abreviado  $\models_L^g \Gamma \Rightarrow \Delta$ , si y sólo si, si sus premisas son todas válidas en  $L$ , entonces sus conclusiones son todas válidas en  $L$ .

Por un lado, la definición es compatible con nuestra lectura intuitiva de la validez global como preservación de validez entre inferencias. Por otro lado, verifica el vínculo pretendido entre las valideces globales y locales de cualquier lógica; la metainferencia (1), por ejemplo, sigue siendo globalmente inválida en lógica clásica, pero ahora es localmente inválida también, por la Definición 35. De esta manera, el enfoque conjuntivo sí habilita una definición plausible de la validez global.

Vale mencionar que, de hecho, en el enfoque conjuntivo no encontramos dos definiciones de validez global que se diferencien de manera genuina. La razón es que el enunciado “Toda conclusión es válida” significa nada más que “Para toda conclusión, y para toda valuación admisible, esa valuación satisface esa conclusión”, y esto es equivalente, en lógica clásica de primer orden, a “Para toda valuación, para toda conclusión, esa valuación satisface esa conclusión”. Luego, los análogos de las Definiciones 36 y 37 para el enfoque conjuntivo son equivalentes entre sí.

## 2. ... y su pandilla

---

En este capítulo, exploro varias lógicas emparentadas de una u otra manera con **CCL**. En la Sec. 2.1, muestro cómo aplicar la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples a algunas lógicas no clásicas, tanto estructurales (v.g. la intuicionista) como subestructurales (v.g. la no transitiva **ST**). En la Sec. 2.2, presento varios sistemas que podrían denominarse clásicos, en el sentido de que se definen sobre la base de interpretaciones clásicas, y se diferencian de la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**, sólo en cómo combinan los cuantificadores existenciales y universales en sus respectivas definiciones de consecuencia. El análisis de estos sistemas da lugar a reflexiones en torno a dos nociones de interés filosófico, que son las de dualidad (2.2.1) y estructuralidad (2.2.2).

### 2.1. Algunas lógicas no clásicas

La motivación filosófica que doy en la Parte II es general, en el sentido de que vale para una amplia gama de sistemas. Por eso, tiene sentido mostrar cómo se aplica el enfoque conjuntivo a algunas lógicas no clásicas típicas. Me concentro más que nada en Teoría de Modelos; sobre el final, digo algunas palabras sobre Teoría de la Prueba.

Como quizás la lectora imagina, es fácil extender el tratamiento modelo-teórico ofrecido en la Sec. 1.1 a muchas de las lógicas que denominamos ‘estructurales’,<sup>1</sup> v.g. la paraconsistente **LP** (cf. Priest, 1979), la paracompleta **K3** (Kleene, 1952, p. 332), la relevante **FDE** (Belnap, 1977) o la intuicionista, que abreviamos **IL** (Heyting, 1930).<sup>2</sup> Para ilustrar, tomemos el caso de **IL**. Esta lógica se usa, sobre todo, para modelar el razonamiento constructivo. A grandes rasgos, el razonamiento constructivo es aquel en donde

---

<sup>1</sup>En el sentido más usual del término, denominamos *estructurales* a las lógicas que validan, tanto de forma global como local, las mismas reglas estructurales que la lógica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**. Para una breve discusión filosófica sobre la noción de estructuralidad, véase Sec. 2.2.2.

<sup>2</sup>Una introducción amena a todos estos sistemas puede encontrarse en Priest (2008).

sólo concluimos la existencia de un objeto cuando podemos brindar un *ejemplo* del objeto en cuestión. Así, una afirmación del tipo “Hay un objeto con la propiedad  $P$ ” se lee como “Podemos mostrar un objeto con la propiedad  $P$ ”. Por su parte, “No hay un objeto con la propiedad  $P$ ” se lee como “Podemos mostrar que es *imposible* mostrar un objeto con la propiedad  $P$ ”. Entendido de esta manera, el razonamiento constructivo invalida algunos principios lógicos clásicamente válidos. Como ejemplos paradigmáticos, tenemos la ley de tercero excluido ( $A$  o no- $A$ ) y la regla de la doble negación ( $\neg\neg A$  implica  $A$ ).

Usamos una semántica de mundos posibles, del tipo ofrecido por Kripke (1965):

**Definición 39.** Una interpretación intuicionista  $I$  de  $\mathcal{L}$  es un triplo  $\langle W, R, v \rangle$ .  $W$  es un conjunto no vacío.  $R$  es una relación reflexiva y transitiva en  $W$ . Por último,  $v$  es una función diádica que va de  $\mathcal{L} \times W$  a  $\{1, 0\}$ , y que satisface los siguientes requisitos, en donde abreviamos  $v(A, w)$  como  $v_w(A)$ :

- (a)  $v_w(A \wedge B) = \min(v_w(A), v_w(B))$
- (b)  $v_w(A \vee B) = \max(v_w(A), v_w(B))$
- (c)  $v_w(\neg A) = 1$  si y sólo si, para todo  $u$  tal que  $wRu$ ,  $v_u(A) = 0$
- (d)  $v_w(A \rightarrow B) = 1$  si y sólo si, para todo  $u$  tal que  $wRu$ ,  $v_u(A) = 0$  o  $v_u(B) = 1$ .
- (e) Para toda variable proposicional  $p$ , si  $v_w(p) = 1$  y  $wRu$ ,  $v_u(p) = 1$

Utilizamos  $\text{Val}^{\text{II}}$  para denotar el conjunto de todas las interpretaciones intuicionistas de  $\mathcal{L}$ , y  $v_w(\Gamma)$  para el conjunto  $\{v_w(A) : A \in \Gamma\}$ .

En términos informales, entendemos cada elemento en  $W$  como un estado de información en un momento dado; las oraciones que reciben el valor 1 en el estado son aquellas que han sido probadas hasta el momento. La afirmación  $wRu$  se lee como diciendo que  $u$  es una posible extensión de  $w$ , obtenida encontrando algún número (posiblemente 0) de nuevas pruebas. Esta lectura justifica la restricción de que  $R$  sea reflexiva y transitiva: todo estado de información  $w$  es trivialmente una extensión de sí mismo, y toda extensión de una extensión de  $w$  es una extensión de  $w$ . La cláusula (c) nos dice que probar  $\neg A$  equivale a probar que en ningún estado de información posterior habrá una prueba de  $A$ . La cláusula (d) nos dice que probar  $A \rightarrow B$  equivale a probar que cualquier prueba de  $A$  puede ser transformada en una prueba de  $B$ . Por último, la cláusula (d) es conocida

como *condición de herencia*; dice que si una oración atómica ha sido probada, permanece probada en cualquier momento posterior.

Comenzamos exhibiendo la lógica intuicionista de conclusiones simples:

**Definición 40.** La relación  $\models_{\text{IL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{IL}} A \text{ si y sólo si, para todo } \langle W, R, v \rangle \in \text{Val}^{\text{IL}} \text{ y todo } w \in W, \\ \text{si } v_w(\Gamma) \subseteq \{1\}, \text{ entonces } v_w(A) = 1.$$

Ahora, la lógica intuicionista de conclusiones múltiples disyuntivas, que denominamos **MIL** (por ‘Mixed Intuitionistic Logic’):

**Definición 41.** La relación  $\models_{\text{MIL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{MIL}} \Delta \text{ si y sólo si, para todo } \langle W, R, v \rangle \in \text{Val}^{\text{IL}} \text{ y todo } w \in W, \\ \text{si } v_w(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ entonces } v_w(\Delta) \not\subseteq \{0\}.$$

Por último, la lógica intuicionista de conclusiones múltiples conjuntivas, que denominamos **CIL** (por ‘Conjunctive Intuitionistic Logic’):

**Definición 42.** La relación  $\models_{\text{CIL}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{CIL}} \Delta \text{ si y sólo si, para todo } \langle W, R, v \rangle \in \text{Val}^{\text{IL}} \text{ y todo } w \in W, \\ \text{si } v_w(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ entonces } v_w(\Delta) \subseteq \{1\}.$$

Es fácil corroborar que resultados análogos a los Hechos 3–8 valen para  $\models_{\text{CIL}}$  (dejamos los detalles a la lectora.) Luego, concluimos que la lógica intuicionista es compatible con las conclusiones múltiples leídas de manera conjuntiva.

En los últimos años, se difundió el estudio y aplicación de las lógicas denominadas *subestructurales*; son sistemas que invalidan uno o más principios estructurales válidos en la lógica clásica (cf. Paoli, 2013; Restall, 2002). Ahora bien, los sistemas de conclusiones múltiples conjuntivas que vimos hasta ahora validan todos los principios estructurales de **CL**, la lógica clásica de conclusiones simples; además, se oponen a sus contrapartidas de conclusiones múltiples estándar en que validan reflexividad (ID) y transitividad (Tr) de manera irrestricta. Uno podría preguntarse entonces, ¿es la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples compatible con las principales propuestas subestructurales en la

literatura? ¿O quizás impone la validez de ciertos principios estructurales de antemano? Si eso último fuera el caso, el espectro de posibles aplicaciones de la lectura conjuntiva se vería restringido. A continuación, sin embargo, sugiero una respuesta positiva a la primera, y negativa a la segunda de las preguntas.

Comencemos con los principios de reflexividad y transitividad. French (2016) propuso la lógica no reflexiva **TS** como medio para lidiar con paradojas semánticas. Por su parte, Cobreros et. al. (2013; 2012a; 2012b; 2015) y Ripley (2012; 2013a; 2013b; 2015; 2021) defienden la lógica no transitiva **ST** como medio para lidiar tanto con paradojas semánticas como con paradojas de la vaguedad. Para presentar estos sistemas, introducimos las interpretaciones de Kleene fuertes, o  $K3$ -interpretaciones:

**Definición 43.** Una  $K3$ -interpretación de  $\mathcal{L}$  es una función  $v : \mathcal{L} \rightarrow \{1, 1/2, 0\}$  tal que

$$v(\perp) = 0$$

$$v(\neg A) = 1 - v(A)$$

$$v(A \vee B) = \max(v(A), v(B))$$

$$v(A \wedge B) = \min(v(A), v(B))$$

$$v(A \rightarrow B) = \max(1 - v(A), v(B))$$

Utilizamos  $\text{Val}^{K3}$  para denotar el conjunto de todas las  $K3$ -interpretaciones de  $\mathcal{L}$ .

**Definición 44.** Las relaciones  $\models_{\text{TS}}, \models_{\text{ST}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$  se definen como sigue:

$\Gamma \models_{\text{TS}} \delta$  si y sólo si, para toda  $v \in \text{Val}^{K3}$ , si  $v(\Gamma) \subseteq \{1, 1/2\}$  entonces  $v(\delta) = 1$ .

$\Gamma \models_{\text{ST}} \delta$  si y sólo si, para toda  $v \in \text{Val}^{K3}$ , si  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$  entonces  $v(\delta) \in \{1, 1/2\}$ .

Cualquier valuación  $v$  tal que  $v(p) = 1/2$  muestra que  $p \not\models_{\text{TS}} p$ . Uno de los rasgos más notorios de **TS** es que carece de argumentos válidos en un lenguaje que no contenga constantes para representar valores semánticos (i.e. expresiones como  $\perp$  o  $\top$ ). Por otro lado, si asumimos que  $v(q) = 0$ , la valuación  $v$  también muestra que la instancia de Cut

$$\frac{\Rightarrow p \quad p \Rightarrow q}{\Rightarrow q}$$

es localmente inválida en **ST**. Uno de los rasgos más notorios de **ST** es que valida los mismos argumentos que la lógica clásica, **CL**.

La interpretación usual de estos sistemas consiste en definir las oraciones *tolerantemente asertables* como aquellas que reciben valor 1 o  $1/2$ ; y las *estrictamente asertables* como aquellas que reciben 1. Así, **TS** nos dice que un argumento es válido si y sólo si, siempre que sus premisas son tolerantemente asertables, su conclusión es estrictamente asertable. Por su parte, **ST** dice que un argumento es válido si y sólo si, siempre que sus premisas son estrictamente asertables, su conclusión es tolerantemente asertable.

Definir las versiones conjuntivas de **TS** y **ST** es sencillo:

**Definición 45.** Las relaciones  $\models_{\text{CTS}}, \models_{\text{CST}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se definen como sigue:

$\Gamma \models_{\text{CTS}} \Delta$  si y sólo si, para toda  $v \in \text{Val}^{K3}$ , si  $v(\Gamma) \subseteq \{1, 1/2\}$  entonces  $v(\Delta) \subseteq \{1\}$ .

$\Gamma \models_{\text{CST}} \Delta$  si y sólo si, para toda  $v \in \text{Val}^{K3}$ , si  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$  entonces  $v(\Delta) \subseteq \{1, 1/2\}$ .

Los sistemas **CTS** y **CST** son no reflexivo y no transitivo, respectivamente; sólo se diferencian de las presentaciones estándar de **TS** y **ST** con conclusiones múltiples en que recuperan ciertas instancias específicas de reflexividad o transitividad. Por un lado,  $\emptyset \models_{\text{CTS}} \emptyset$ . Por otro, **CST** valida localmente toda instancia de Cut del tipo

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma', A \Rightarrow}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow}$$

Por lo demás, es fácil corroborar que **CTS** y **CST** verifican los resultados esperables, por analogía con los Hechos 3–8 para **CCL**. Por ejemplo, **CTS** es transitiva y **CST** es reflexiva, en ambos casos de manera irrestricta (Hecho 4). Luego, es claro que el enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples es compatible con el uso de lógicas no reflexivas y no transitivas. Vale la pena mencionar, por último, que **CST** y **CCL** son coextensivas:

**Hecho 17.**  $\Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \models_{\text{CST}} \Delta$

(La prueba se deja como ejercicio a la lectora.) Esto es relevante porque evidencia que **CST**, a igual que **ST**, puede ser utilizada para lidiar con paradojas por medio de teorías que extienden conservativamente la lógica clásica.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Vale mencionar que una teoría acerca de conceptos paradójicos formulada sobre **CST** recupera ciertas instancias de transitividad que, en general, se consideran claves para evitar la trivialidad. Por ejemplo, sea  $\lambda$  una oración que recibe valor  $1/2$  en toda valuación. **CST** valida la siguiente instancia de Cut

$$\frac{\lambda \Rightarrow \quad \Rightarrow \lambda}{\Rightarrow}$$

Tanto **CTS** como **CST** validan Debilitamiento Izquierdo (LW). Quizás, uno podría pensar que el enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples presupone una noción de consecuencia monótona para premisas. Esto no es así. Para mostrarlo, consideramos la lógica conexiva que ofrece Priest (1999) para formalizar lo que se conoce como *enfoque nulo a la negación*. Denominamos a esta lógica **NN**:

**Definición 46.** La relación  $\models_{\text{NN}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{NN}} \delta \text{ si y sólo si } \Gamma \text{ es consistente y } \Gamma \models_{\text{CL}} \delta.$$

El enfoque nulo a la negación consiste en sostener, por un lado, que la consecuencia lógica se entiende como inclusión de contenido:  $A$  implica  $B$  si y sólo si el contenido de  $B$  está incluido en el contenido de  $A$ ; por otro lado, que la negación es un operador que *cancela* el contenido informativo del enunciado sobre el que se aplica; luego, una contradicción como v.g.  $A \wedge \neg A$  carece de contenido, o en otras palabras, tiene un contenido nulo. Del enfoque se sigue, según Priest (1999), que las contradicciones y conjuntos de premisas inconsistentes “no implican nada”. La relación de consecuencia  $\models_{\text{NN}}$  reivindica esta tesis. Es fácil ver que  $\models_{\text{NN}}$  es no monótona:  $p \models_{\text{NN}} p$  pero  $p \wedge \neg p \not\models_{\text{NN}} p$ .

Generalizar **NN** a conclusiones múltiples conjuntivas es simple:

**Definición 47.** La relación  $\models_{\text{CNN}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_{\text{CNN}} \Delta \text{ si y sólo si } \Gamma \text{ es consistente y } \Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta.$$

La relación  $\models_{\text{CNN}}$  tiene todos los rasgos que vienen caracterizando a las lógicas conjuntivas, y es no monótona también. Luego, es claro que la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples es compatible con relaciones de consecuencia no monótonas.

Alguien podría conceder esto último, y sin embargo, plantear un par de objeciones. Ambas sostienen que **CNN** no modela de manera adecuada el enfoque nulo a la negación.<sup>4</sup> La primera es que, si una contradicción tiene contenido nulo, y la consecuencia lógica se entiende como inclusión de contenido, entonces una contradicción debería seguirse de

---

La razón por la que **CST** no trivializa es, claro está, que carece de debilitamiento derecho. Esta observación respalda la opinión, expresada a menudo en la literatura, de que al estudiar las paradojas, es difícil señalar un único principio, operacional o estructural, que sea el ‘culpable’ de la trivialidad.

<sup>4</sup>Mi objetivo, claro está, no es proporcionar una formalización adecuada del enfoque en cuestión. Pero creo que el mismo tiene interés filosófico. Luego, responder a la objeciones sirve para respaldar la idea de que la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples tiene aplicaciones interesantes.

cualquier cosa, y en particular—*pace* Priest—de otra contradicción. Sin embargo, eso no ocurre en las lógicas NN y CNN. Bajo el supuesto de que la objeción sea acertada—algo que no doy por sentado—para solucionar el problema basta con hacer una ligera modificación en la definición de validez. Me concentro en el caso de CNN:

$$\Gamma \models_{\text{CNN}^*} \Delta \text{ si y sólo si, o } \Delta \text{ es inconsistente, o } (\Gamma \text{ es consistente y } \Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta).$$

Es claro que, en  $\text{CNN}^*$ , una contradicción se sigue de cualquier cosa. La segunda objeción es que, ahora, el conjunto vacío  $\emptyset$  no parece admitir una lectura aceptable. No podemos decir que tiene un contenido *total*, porque entonces debería implicar cualquier cosa, pero, v.g. no implica contingencias. Tampoco podemos decir que tiene un contenido *nulo*, porque entonces debería seguirse de cualquier cosa, pero, v.g. no se sigue de inconsistencias.<sup>5</sup> Para solucionar el problema, hacemos otro pequeño ajuste:

$$\Gamma \models_{\text{CNN}^{**}} \Delta \text{ si y sólo si, o } \Delta \text{ es inconsistente, o } \Delta = \emptyset, \text{ o } (\Gamma \text{ es consistente y } \Gamma \models_{\text{CCL}} \Delta).$$

Es claro que, en  $\text{CNN}^*$ , podemos decir que  $\emptyset$  tiene contenido nulo. Concluyo, entonces, que la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples es compatible con el enfoque nulo a la negación, y de hecho, resulta fructífera para explorar el enfoque en cuestión.

La última familia de lógicas subestructurales que consideramos con algún detalle es la de las lógicas *no contractivas*. Básicamente, son sistemas en donde la validez es sensible a la cantidad de veces que las premisas aparecen en los argumentos. En particular, son inválidas las siguientes reglas de ‘Contracción’:

$$\text{LC } \frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{RC } \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

(Las etiquetas LC y RC responden a ‘Left Contraction’ y ‘Right Contraction’.) La idea intuitiva es que, cuando razonamos, vamos *gastando* la información a nuestra disposición y, por ende, tener una información más veces nos permite inferir más cosas que tener esa misma información menos veces.

Toda relación de consecuencia definida sobre conjuntos (y en esta bolsa caen todas las lógicas que vimos hasta ahora) valida las reglas LC y RC *por definición*, dado que

<sup>5</sup>La razón es que  $\emptyset$  es consistente, i.e. no hay oraciones  $A$  tales que  $\emptyset \models_{\text{CL}} A$  y  $\emptyset \models_{\text{CL}} \neg A$ .

la identidad entre conjuntos es insensible a la cantidad de ocurrencias de sus elementos. Por eso, para definir lógicas no contractivas apelamos a multiconjuntos. En términos informales, un multiconjunto es una colección similar en todo a un conjunto salvo que su identidad es sensible a la cantidad de ocurrencias de sus elementos. En términos más precisos, un *multiconjunto* sobre un conjunto  $\Gamma$  es una función  $\mathfrak{M}$  que va de  $\Gamma$  a los números naturales,  $\mathbb{N}$ . El *conjunto-raíz* de  $\mathfrak{M}$  es el conjunto  $|\mathfrak{M}| = \{\gamma \in \Gamma : \mathfrak{M}(\gamma) > 0\}$ . Para describir un multiconjunto por extensión usamos corchetes; así, el multiconjunto  $[a, a, b]$  sobre el conjunto  $\{a, b, c\}$  es el multiconjunto  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M}(a) = 2$ ,  $\mathfrak{M}(b) = 1$  y  $\mathfrak{M}(c) = 0$ . Si  $\Gamma$  es un conjunto, el *multiconjunto potencia* de  $\Gamma$ , denotado por  $\mathcal{P}^M(\Gamma)$ , es el conjunto de todos los multiconjuntos sobre  $\Gamma$ . Si  $\mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{N}$  son multiconjuntos sobre  $\Gamma$ , el multiconjunto  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  se define diciendo que  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(\gamma) = \mathfrak{M}(\gamma) + \mathfrak{N}(\gamma)$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Usamos la expresión  $\mathfrak{M}, \gamma$  para denotar al multiconjunto  $\mathfrak{M}, [\gamma]$ . Dado este bagaje técnico, definir lógicas no contractivas es posible.

Rosenblatt (2019; 2021) y Zardini (2011) defienden lógicas de este tipo para lidiar con paradojas semánticas. En este trabajo, consideramos la lógica **NC** ofrecida por Rosenblatt. Comenzamos introduciendo las siguientes operaciones:

$\sqcap$	1	1/2	0	$\otimes$	1	1/2	0	$\sqcup$	1	1/2	0	$\oplus$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1/2	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	0	1/2	1/2	0	0	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1/2	0	0	1	1/2	0

Con las mismas, estamos en condiciones de definir las **NC**-interpretaciones de  $\mathcal{L}$ :

**Definición 48.** Una **NC**-interpretación de  $\mathcal{L}$  es un par  $\langle v^-, v^+ \rangle$ , en donde  $v^-$  y  $v^+$  son funciones que van de  $\mathcal{L}$  al conjunto  $\{1, 1/2, 0\}$  tales que:

- (a)  $v^-(A^{AT}) = v^+(A^{AT}) \in \{1, 1/2, 0\}$
- (b)  $v^-(\neg A) = 1 - v^+(A)$  y  $v^+(\neg A) = 1 - v^-(A)$
- (c)  $v^-(A \wedge B) = v^-(A) \otimes v^-(B)$  y  $v^+(A \wedge B) = v^+(A) \sqcap v^+(B)$
- (d)  $v^-(A \vee B) = v^-(A) \sqcup v^-(B)$  y  $v^+(A \vee B) = v^+(A) \oplus v^+(B)$

Usamos  $\text{Val}^{\text{NC}}$  para el conjunto de las **NC**-interpretaciones, y los símbolos  $\otimes$ ,  $\oplus$ ,  $\sqcap$  y  $\sqcup$  para las generalizaciones de  $\otimes$ ,  $\oplus$ ,  $\sqcap$  y  $\sqcup$  a multiconjuntos arbitrarios. Por último, si  $\mathfrak{M}$

es un multiconjunto de fórmulas, y  $v \in \langle v^+, v^- \rangle$ , entonces  $v(\mathfrak{M})$  es el multiconjunto de valores semánticos tal que, para cada  $\gamma$  en  $|\mathfrak{M}|$ ,  $v(\mathfrak{M})(v(\gamma)) = \mathfrak{M}(\gamma)$ .<sup>6</sup>

A continuación, exhibimos la lógica defendida por Rosenblatt, que denominamos **MNC** (por ‘Mixed Non-Contractive’), y su restricción a conclusiones simples.

**Definición 49.** La relación  $\models_{\text{MNC}} \subseteq \mathcal{P}^M(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}^M(\mathcal{L})$  queda definida como sigue:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models_{\text{MNC}} \Omega \text{ si y sólo si, para todo } \langle v^-, v^+ \rangle \in \text{Val}^{\text{NC}}, \\ \text{(a) Si } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 1 \text{ entonces } \oplus(v^+(\Omega)) = 1, \text{ y} \\ \text{(b) Si } \oplus(v^+(\Omega)) = 0, \text{ entonces } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 0 \end{aligned}$$

**Definición 50.** La relación  $\models_{\text{NC}} \subseteq \mathcal{P}^M(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$  queda definida como sigue:

$$\mathfrak{M} \models_{\text{NC}} \delta \text{ si y sólo si } \mathfrak{M} \models_{\text{MNC}} [\delta]$$

Cualquier  $\langle v^-, v^+ \rangle$  tal que  $v^-(p) = v^+(p) = 1/2$  muestra que las instancias de LC y RC

$$\frac{p, p \Rightarrow}{p \Rightarrow} \qquad \frac{\Rightarrow p, p}{\Rightarrow p}$$

son localmente inválidas en **MNC**. Uno de los rasgos más notorios de **MNC** es que valida los mismos argumentos que la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**.

La generalización de **NC** a conclusiones múltiples conjuntivas no es tan obvia como en los casos de **TS** o **ST**, aunque no deja de ser simple:<sup>7</sup>

<sup>6</sup>En términos informales, el multiconjunto  $v(\mathfrak{M})$  contiene tantas ocurrencias de  $v(\gamma)$  como ocurrencias de  $\gamma$  hay en  $\mathfrak{M}$ .

<sup>7</sup>*Nota técnica.* Hay otras dos definiciones que, si bien parecen plausibles a primera vista, no devuelven los resultados esperados. En ambas, la operación  $\otimes$  se usa tanto en las premisas como en las conclusiones. La primera definición y reza:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models_{\text{CNC}^*} \Omega \text{ si y sólo si, para todo } \langle v^-, v^+ \rangle \in \text{Val}^{\text{NC}}, \\ \text{(a) Si } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 1 \text{ entonces } \otimes(v^-(\Omega)) = 1, \text{ y} \\ \text{(b) Si } \otimes(v^-(\Omega)) = 0, \text{ entonces } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 0 \end{aligned}$$

Esta definición falsifica un resultado análogo al Hecho 18, ya que  $\not\models_{\text{CNC}^*} p \vee \neg p$  (tómese cualquier interpretación en donde  $p$  obtenga valor 1/2). La segunda definición reza

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models_{\text{CNC}^{**}} \Omega \text{ si y sólo si, para todo } \langle v^-, v^+ \rangle \in \text{Val}^{\text{NC}}, \\ \text{(a) Si } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 1 \text{ entonces } \otimes(v^+(\Omega)) = 1, \text{ y} \\ \text{(b) Si } \otimes(v^+(\Omega)) = 0, \text{ entonces } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 0 \end{aligned}$$

Esta definición es inmune al problema anterior, pero falsifica un resultado análogo al Hecho 19, ya que  $p \not\models_{\text{CNC}^{**}} p, p$  (otra vez, tómese cualquier interpretación en donde  $p$  obtenga valor 1/2). En resumen, ninguna de las definiciones verifica un resultado análogo al Teorema 20.

*Nota filosófica.* A pesar de lo anterior, la relación  $\models_{\text{CNC}^{**}}$  es interesante. La razón es que, como se desprende de lo anterior, invalida el esquema de argumento que va de  $[A]$  a  $[A, A]$ . Si leemos la coma de manera conjuntiva, parece razonable que una lógica no contractiva invalide este esquema.

**Definición 51.** La relación  $\models_{\text{CNC}} \subseteq \mathcal{P}^M(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}^M(\mathcal{L})$  queda definida como sigue:

- $$\begin{aligned} & \mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} \Omega \text{ si y sólo si, para todo } \langle v^-, v^+ \rangle \in \text{Val}^{\text{NC}}, \\ & \text{(a) Si } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 1 \text{ entonces } \sqcap(v^+(\Omega)) = 1, \text{ y} \\ & \text{(b) Si } \sqcap(v^+(\Omega)) = 0, \text{ entonces } \otimes(v^-(\mathfrak{M})) = 0 \end{aligned}$$

La lógica **CNC** se asemeja a **MNC** en que invalida localmente la regla de contracción izquierda, LC. Para verificarlo, basta con tomar la instancia

$$\frac{p, p \Rightarrow \perp}{p \Rightarrow \perp}$$

y considerar, igual que antes, cualquier interpretación en la que  $p$  reciba el valor  $1/2$ . Ahora bien, **CNC** difiere de **MNC** en que valida localmente la regla de contracción derecha, RC. Para verificarlo, basta con notar que, para cualquier interpretación  $\langle v^+, v^- \rangle$ , si  $\sqcap[v^+(A), v^+(A)] = 1$ , entonces  $\sqcap[v^+(A)] = 1$ , y si  $\sqcap[v^+(A), v^+(A)] \neq 0$ , entonces  $\sqcap[v^+(A)] \neq 0$ . En ese sentido, podría decirse que **CNC** es ‘menos no contractiva’ que **MNC**. Sin embargo, no creo que eso sea un problema. Cuando leemos las conclusiones múltiples de manera conjuntiva, la regla RC dice que, siempre que nuestras premisas nos permiten inferir dos ocurrencias de una fórmula  $A$ , también nos permiten inferir una sola ocurrencia. Eso es compatible con la idea de que la información ‘se gasta’ cuando lo usamos para razonar. Luego, **CNC** respeta la principal motivación de los sistemas no contractivos. Además, el sistema invalida lo que podemos denominar ‘Anticontracción Derecha’ (‘Right anti-Contraction’):

$$\text{RaC } \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}$$

La invalidez de RaC es razonable, ya que la regla nos dice que, siempre que nuestras premisas nos permiten inferir una ocurrencia de una fórmula  $A$ , también nos permiten inferir dos ocurrencias.

En lo que sigue, mostramos que, así como la lógica **MNC** de Rosenblatt es coextensiva con **MCL**, nuestra lógica **CNC** es coextensiva con **CCL**. Para empezar, hacemos un par de observaciones:

**Hecho 18.**  $\mathfrak{M} \models_{\text{NC}} \delta$  si y sólo si  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} [\delta]$

*Demostración.* Se sigue de la identidad  $\prod([v^+(\delta)]) = \bigoplus([v^+(\delta)]) = v^+(\delta)$   $\square$

**Hecho 19.**  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} \Omega$  si y sólo si  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} [\delta]$  para todo  $\delta \in |\Omega|$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} \Omega$ . Sea  $\sigma \in |\Omega|$ , y  $\langle v^-, v^+ \rangle \in \text{Val}^{\text{NC}}$ . Si  $\prod(v^+(\Omega)) = 1$  entonces  $\prod([v^+(\sigma)]) = 1$ , y si  $\prod([v^+(\sigma)]) = 0$ ,  $\prod(v^+(\Omega)) = 0$ . Luego, por la definición de  $\models_{\text{CNC}}$  sabemos que: (a) si  $\bigotimes(v^-(\mathfrak{M})) = 1$ , entonces  $\prod([v^+(\sigma)]) = 1$ , y (b) si  $\prod([v^+(\sigma)]) = 0$ , entonces  $\bigotimes(v^-(\mathfrak{M})) = 0$ . Pero el par  $\langle v^-, v^+ \rangle$  y la  $\sigma \in |\Omega|$  eran arbitrarios. Luego,  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} [\delta]$  para todo  $\delta \in |\Omega|$ . La converso se obtiene de manera simétrica.  $\square$

Ahora sí, nuestro resultado. Establece que un multiconjunto se sigue de otro en **CNC** si y sólo si su conjunto-raíz se sigue del conjunto-raíz de aquel en **CCL**:

**Teorema 20.**  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} \Omega$  si y sólo si  $|\mathfrak{M}| \models_{\text{CCL}} |\Omega|$

*Demostración.*  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} \Omega$  si y sólo si  $\mathfrak{M} \models_{\text{CNC}} [\delta]$  para todo  $\delta \in |\Omega|$  (Hecho 19), si y sólo si  $\mathfrak{M} \models_{\text{NC}} \delta$  para todo  $\delta \in |\Omega|$  (Hecho 18), si y sólo si  $|\mathfrak{M}| \models_{\text{CL}} \delta$  para todo  $\delta \in |\Omega|$  (coextensividad de  $\models_{\text{NC}}$  y  $\models_{\text{CL}}$ ), si y sólo si  $|\mathfrak{M}| \models_{\text{CCL}} \delta$  para todo  $\delta \in |\Omega|$  (Hecho 6), si y sólo si  $|\mathfrak{M}| \models_{\text{CCL}} |\Omega|$  (Hecho 3).  $\square$

Concluimos que la lógica **CNC** se comporta de la manera esperada, por lo que la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples es compatible con el uso de relaciones de consecuencia no contractivas.

Existen muchas otras familias de lógicas subestructurales. Por ejemplo, las lógicas usadas para hacer gramática categórica, como el cálculo Lambek; en estas lógicas, la validez es sensible no sólo a cuales son las premisas y cuántas veces aparecen, sino también al *orden* en que sus apariciones tienen lugar (cf. Lambek 1958; 1961; Moortgat, 2020). Una línea de investigación interesante sería continuar analizando si la lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples es compatible con las distintas familias de lógicas subestructurales en la literatura, y de ser así, si su aplicación a esas familias de lógicas resulta fructífera.

Para terminar esta sección, hago dos observaciones sobre Teoría de la Prueba. La primera es que hay lógicas de conclusiones simples que son no clásicas en el sentido de

subestructurales, y sin embargo coinciden con la lógica clásica en sus argumentos válidos; dos ejemplos son, como ya vimos, **ST** y **NC**. Además—y como era de esperar—las generalizaciones de estas lógicas a conclusiones múltiples conjuntivas, i.e. **CST** y **CNC**, coinciden con la generalización de la lógica clásica a conclusiones múltiples conjuntivas, **CCL**. Luego, ya contamos con cálculos de secuentes y deducción natural correctos y completos para tales generalizaciones: son  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  y  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ . Cabe mencionar, además, que  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  no contiene las reglas de transitividad, Cut y Tr, y esto puede ser útil a efectos de aplicar el cálculo al tratamiento de paradojas.

La segunda observación concierne a lógicas no clásicas que son no coextensivas con la clásica, como v.g. **LP**, **K3**, **FDE**, etc. ¿Cómo podemos encontrar cálculos de secuentes correctos y completos para las presentaciones de estas lógicas con conclusiones múltiples conjuntivas? Si volvemos sobre las definiciones de los sistemas  $\mathcal{S}_{\text{CCL}}$  y  $\mathcal{N}_{\text{CCL}}$ , vemos que ambos difieren de sus respectivas contrapartidas de conclusiones simples, i.e.  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$  y  $\mathcal{N}_{\text{CL}}$ , sólo en que agregan dos reglas: una que sirve para deducir el conjunto vacío  $\emptyset$  a partir de cualquier conjunto de premisas, y otra que sirve para tomar una cantidad arbitraria de derivaciones, cada una con una única conclusión, y ‘fusionarlas’ en una derivación única, con conclusiones múltiples. Las reglas en cuestión son ambas estructurales, es decir, no mencionan constantes lógicas; luego, resultan compatibles con un amplio rango de reglas distintas para las constantes.<sup>8</sup> Mi sugerencia, entonces, es que para encontrar los cálculos que buscamos, sigamos la siguiente estrategia: primero, nos hacemos de un cálculo para la presentación con conclusiones simples de la lógica que nos interesa; segundo, simplemente le agregamos a ese cálculo las dos reglas mencionadas.

<sup>8</sup>El enfoque conjuntivo *impone* algunos requisitos sobre las reglas para las constantes. Por ejemplo, la siguiente regla de la disyunción

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

es utilizada en algunos cálculos para la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, pero resulta globalmente inválida en **CCL** (un contraejemplo:  $p \vdash_{\text{CCL}} p$  y  $q \vdash_{\text{CCL}} q$ , pero  $p \vee q \not\vdash_{\text{CCL}} p, q$ ). De cualquier manera, lo anterior es esperable, dadas las complejas interacciones que suele haber entre reglas estructurales y operacionales.

Para ilustrar la sugerencia, tomemos el caso de la lógica intuicionista. Nuestros cálculos de secuentes y deducción natural para conclusiones simples son los siguientes:<sup>9</sup>

**Definición 52.**  $\mathcal{S}_{IL}$  es el cálculo que se obtiene a partir de  $\mathcal{S}_{CL}$  removiendo *Gem-at*

**Definición 53.**  $\mathcal{N}_{IL}$  es el cálculo que se obtiene a partir de  $\mathcal{N}_{CL}$  removiendo LEM

A efectos de obtener cálculos para la lógica intuicionista de conclusiones múltiples conjuntivas, **CIL**, sólo extendemos  $\mathcal{S}_{IL}$  y  $\mathcal{N}_{IL}$  con las dos reglas relevantes:

**Definición 54.**  $\mathcal{S}_{CIL}$  es el cálculo que resulta de extender  $\mathcal{S}_{CL}$  con  $R\emptyset$  y  $\mathcal{S}$ -Merge

**Definición 55.**  $\mathcal{N}_{CIL}$  es el cálculo que resulta de extender  $\mathcal{N}_{CL}$  con  $\emptyset$ -I y  $\mathcal{N}$ -Merge

**Teorema 21.**  $\Gamma \models_{CIL} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{CIL}} \Delta$

**Teorema 22.**  $\Gamma \models_{CIL} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}_{CIL}} \Delta$

(Las pruebas son análogas a las de los Teoremas 9 y 11.) Así, nuestra búsqueda de cálculos para la lógica intuicionista resultó más que simple. Por supuesto, la estrategia que sugiero será exitosa sólo en la medida que conozcamos, o logremos encontrar, cálculos de conclusiones simples para las lógicas que nos interesan; esto puede considerarse una limitación, dado que no se conocen, o al menos no se encuentran en la literatura, cálculos de conclusiones simples para muchas lógicas no clásicas estándar—como por ejemplo, **LP** o **K3**. Sin embargo, considero que la estrategia sugerida proporciona una buena heurística para la búsqueda de sistemas de prueba con conclusiones múltiples conjuntivas.

## 2.2. Múltiples lógicas clásicas

Hasta ahora, toda nuestra exploración técnica viene descansando sobre dos supuestos implícitos: primero, que las premisas de los argumentos se leen de manera conjuntiva; segundo, que tanto las premisas como las conclusiones reciben una lectura determinada—es posible decir si se leen de manera conjuntiva o disyuntiva—y unívoca—nunca se

<sup>9</sup>La lectora puede encontrar los sistemas  $\mathcal{S}_{IL}$  y  $\mathcal{N}_{IL}$  presentados en Negri y Von Plato (2008) y Gentzen (1934–35), respectivamente.

leen de ambas manera a la vez. En esta sección, analizamos los varios sistemas que es posible definir una vez que relajamos los anteriores supuestos. Los sistemas en cuestión podrían todos denominarse ‘clásicos’, dado que se definen sobre la base de interpretaciones clásicas, y se diferencian de la presentación estándar de la lógica clásica de conclusiones múltiples, **MCL**, sólo en cómo combinan los cuantificadores existenciales y universales en sus respectivas definiciones de consecuencia.

### 2.2.1. Conjunción, disyunción y dualidad

En la Sección 1.1, vimos que **CCL** y **MCL** pueden ser entendidas como generalizaciones de la lógica clásica de conclusiones simples, **CL**. Son generalizaciones en el sentido preciso de que coinciden con **CL** en argumentos de una única conclusión. Ahora bien, también es posible entender **CL** como una generalización de otro sistema, a saber, la lógica clásica de conclusiones y premisas simples, que denominamos  $\text{cl}$ :

**Definición 56.** La relación  $\models_{\text{cl}} \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$  queda definida como sigue:

$$A \models_{\text{cl}} B \text{ si y sólo si, } \forall v \in \text{Val}, \text{ si } v(A) = 1 \text{ entonces } v(B) = 1$$

Por supuesto, **CL** coincide con  $\text{cl}$  en argumentos de premisas y conclusiones simples. Además, **CL** admite argumentos con premisas múltiples, e impone una lectura conjuntiva de esas premisas. Ahora bien, la lectura conjuntiva no es la única opción: podríamos generalizar  $\models_{\text{cl}}$  a premisas múltiples, y leer las premisas como disyunciones. A continuación, presento y analizo las lógicas ‘clásicas’ de conclusiones y premisas múltiples que es posible definir si admitimos la lectura disyuntiva de las premisas.

Dos de esas lógicas son, claro está, **CCL** y **MCL**. Para facilitar la lectura de lo que sigue, a veces voy a usar  $\models_{\wedge\wedge}$  para denotar  $\models_{\text{CCL}}$ , y  $\models_{\wedge\vee}$  para denotar  $\models_{\text{MCL}}$ — los subíndices son autoexplicativos. Dado que las posibles combinaciones de lecturas conjuntivas y disyuntivas de las premisas y conclusiones son cuatro, las lógicas que nos resta presentar son sólo dos. Se trata de las siguientes:

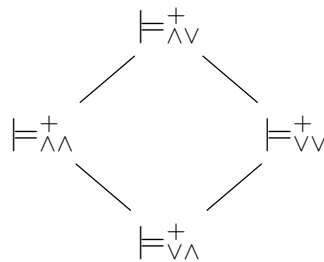
**Definición 57.** Las relaciones  $\models_{\vee\vee}, \models_{\vee\wedge} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se definen como sigue:

$$\Gamma \models_{\vee\vee} \Delta \text{ si y sólo si, } \forall v \in \text{Val}, \text{ si } v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}, \text{ entonces } v(\Delta) \not\subseteq \{0\}$$

$\Gamma \models_{v\wedge} \Delta$  si y sólo si,  $\forall v \in \text{Val}$ , si  $v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}$ , entonces  $v(\Delta) \subseteq \{1\}$

En términos informales, un argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  es  $\models_{v\vee}$ -válido si y sólo si, siempre que al menos una premisa en  $\Gamma$  es verdadera, al menos una conclusión en  $\Delta$  es verdadera; el mismo argumento es  $\models_{v\wedge}$ -válido si y sólo si, siempre que al menos una premisa en  $\Gamma$  es verdadera, todas las conclusiones en  $\Delta$  son verdaderas. Otra lectura intuitiva sería la siguiente: alguien que esgrime un argumento  $\models_{v\vee}$ -válido, sostiene: “Si me concedes *cualquiera* de mis premisas, entonces debes aceptar alguna de mis conclusiones”; alguien que esgrime un argumento  $\models_{v\wedge}$ -válido sostiene: “Si me concedes cualquiera de mis premisas, entonces debes aceptar *todas* mis conclusiones”. La lógica correspondiente a la relación de consecuencia  $\models_{v\vee}$  la denominamos  $\mathbf{CL}^{\vee\vee}$ ; la correspondiente a  $\models_{v\wedge}$ ,  $\mathbf{CL}^{\wedge\wedge}$ .

Si restringimos nuestra atención a argumentos con conjuntos no vacíos de premisas y conclusiones,  $\models_{v\wedge}$  proporciona un estándar de validez bastante más exigente que el de las otras tres relaciones de consecuencia consideradas. Para cualesquiera  $\Gamma$  y  $\Delta$  no vacíos, si el argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  es válido en  $\models_{v\wedge}$ , entonces es válido en  $\models_{v\vee}$ ,  $\models_{\wedge\wedge}$  y  $\models_{\wedge\vee}$ , pero se da la converso. Por su parte,  $\models_{\wedge\vee}$  proporciona un estándar de validez bastante más laxo. Asumiendo otra vez que  $\Gamma$  y  $\Delta$  no vacíos, si el argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  es válido en  $\models_{v\vee}$ ,  $\models_{\wedge\wedge}$  o  $\models_{\wedge\vee}$ , entonces es válido en  $\models_{\wedge\vee}$ , y la converso tampoco se da. Por último,  $\models_{v\vee}$ ,  $\models_{\wedge\wedge}$  son incomparables, es decir, hay argumentos que son  $\models_{v\vee}$ -válidos pero  $\models_{\wedge\wedge}$ -inválidos (v.g. el que va de  $\{p\}$  a  $\{p, q\}$ ) y *vice versa* (v.g. el que va de  $\{p, q\}$  a  $\{p\}$ ). Para ilustrar de manera gráfica, asumamos esta convención notacional: si  $R$  es una relación en  $S \times P$ , entonces  $R^+$  es la restricción de  $R$  al conjunto  $(S - \{\emptyset\}) \times (P - \{\emptyset\})$ . Entonces, tenemos el siguiente ordenamiento



en donde las relaciones por encima incluyen propiamente a las relaciones por debajo, y las relaciones que están a la misma altura son incomparables.

Ahora bien, si no nos restringimos a argumentos con tanto premisas como conclusiones no vacías, las lógicas que consideramos son todas incomparables, o en jerga del campo, contralógicas unas de las otras:

**Definición 58.** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos lógicas formuladas en el mismo lenguaje.  $L_1$  es una *sublógica* de  $L_2$  si y sólo si invalida algún principio que  $L_2$  valida; es una *superlógica* de  $L_2$  si y sólo si valida algún principio que  $L_2$  invalida.  $L_1$  y  $L_2$  son *contralógicas* si y sólo si son tanto sublógica como superlógicas una de la otra.

**Hecho 23.** Las relaciones  $\models_{V\wedge}$ ,  $\models_{V\vee}$ ,  $\models_{\wedge\wedge}$  y  $\models_{\wedge\vee}$  son contralógicas unas de otras.

*Demostración.* Ya sabemos que  $\models_{\wedge\wedge}$  y  $\models_{\wedge\vee}$  son contralógicas por el Hecho 7. Además,  $\{p, q\} \models_{\wedge\wedge} q$ , pero  $\{p, q\} \not\models_{V\vee} q$  y  $\{p, q\} \not\models_{V\wedge} q$ . Luego,  $\models_{\wedge\wedge}$  es contralógica de las otras tres. Por otro lado,  $\{p, q\} \models_{V\vee} \{p, q\}$ , pero  $\{p, q\} \not\models_{V\wedge} \{p, q\}$ , y  $p \models_{V\vee} \emptyset$ , pero  $p \not\models_{\wedge\vee} \emptyset$ . Luego,  $\models_{V\vee}$  es también contralógica de las otras. Por último,  $p \models_{V\wedge} \emptyset$ , pero  $p \not\models_{\wedge\vee} \emptyset$ . Así,  $\models_{V\wedge}$  y  $\models_{\wedge\vee}$  son contralógicas entre sí y por ende de las otras tres.  $\square$

Las lógicas  $\models_{V\vee}$  y  $\models_{V\wedge}$  también tienen un comportamiento estructural bastante diferente del de **CCL** o **MCL**. Listo algunos ejemplos:

**Hecho 24.** Para cualesquiera  $\Gamma, \Delta, \Sigma, \{A\} \subseteq \mathcal{L}$  se da que:

- (a)  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta$  si y sólo si  $\gamma \models_{V\vee} \Delta$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ .
- (b)  $\Gamma \models_{V\vee} \Gamma$
- (c) Si  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta$  y  $\Delta \models_{V\vee} \Sigma$ , entonces  $\Gamma \models_{V\vee} \Sigma$
- (d) Si  $\Gamma \models_{V\vee} A, \Delta$  y  $\Gamma', A \models_{V\vee} \Delta'$ , entonces  $\Gamma, \Gamma' \models_{V\vee} \Delta\Delta'$ .
- (e) Si  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta$ , entonces  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta, \Sigma$
- (f) Si  $\Gamma, \Sigma \models_{V\vee} \Delta$ , entonces  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta$

No se da que, para cualesquiera  $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq \mathcal{L}$ :

- (g) Si  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta$ , entonces  $\Gamma, \Sigma \models_{V\vee} \Delta$  (v.g.  $p \models_{V\vee} p$  pero  $p, q \not\models_{V\vee} p$ )
- (h) Si  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta, \Sigma$ , entonces  $\Gamma \models_{V\vee} \Delta$  (v.g.  $p \models_{V\vee} p, q$  pero  $p \not\models_{V\vee} q$ )

(Las pruebas de los hechos (a)–(f) se dejan como ejercicio para la lectora.) La condición (a) justifica la idea de que en  $\models_{V\vee}$  las premisas han de leerse de manera disyuntiva.

Repasando y ampliando lo visto en la Sección 1, explicitamos el significado informal de las condiciones restantes: (b) dice que  $\models_{VV}$  es reflexiva; (c) dice que  $\models_{VV}$  es transitiva; (d) dice que  $\models_{VV}$  valida globalmente Corte (Cut); (e) dice que  $\models_{VV}$  valida globalmente Debilitamiento Derecho (RW); (f) dice que  $\models_{VV}$  valida globalmente la regla que denominaremos ‘Antidebilitamiento Izquierdo’ [‘Left anti-Weakening’]:

$$\text{LaW} \frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

(g) dice que  $\models_{VV}$  invalida globalmente debilitamiento izquierdo (LW), y por último, (h) dice que  $\models_{VV}$  invalida globalmente antidebilitamiento derecho (RaW).

**Hecho 25.** Para cualesquiera  $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq \mathcal{L}$  se da que:

- (a)  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta$  si y sólo si  $\gamma \models_{V\wedge} \delta$  para todo  $\gamma \in \Gamma$  y  $\delta \in \Delta$ .
- (b) Si  $\Gamma \models_{V\wedge} A, \Delta$  y  $\Gamma', A \models_{V\wedge} \Delta'$ , entonces  $\Gamma, \Gamma' \models_{V\wedge} \Delta \Delta'$
- (c) Si  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta, \Sigma$ , entonces  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta$
- (d) Si  $\Gamma, \Sigma \models_{V\wedge} \Delta$ , entonces  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta$

No se da que, para cualesquiera  $\Gamma, \Delta, \Sigma \subseteq \mathcal{L}$ :

- (d)  $\Gamma \models_{V\wedge} \Gamma$  (v.g.  $p, q \not\models_{V\wedge} p, q$ )
- (e) Si  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta$  y  $\Delta \models_{V\wedge} \Sigma$ , entonces  $\Gamma \models_{V\wedge} \Sigma$  (v.g.  $p \models_{V\wedge} \emptyset$  y  $\emptyset \models_{V\wedge} q$ , pero  $p \not\models_{V\wedge} q$ )
- (f) Si  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta$ , entonces  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta, \Sigma$  (v.g.  $p \models_{V\wedge} p$  pero  $p \not\models_{V\wedge} p, q$ )
- (g) Si  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta$ , entonces  $\Gamma, \Sigma \models_{V\wedge} \Delta$  (v.g.  $p \models_{V\wedge} p$  pero  $p, q \not\models_{V\wedge} p$ )

(Las pruebas de los hechos (a)–(d) se dejan como ejercicio para la lectora.) La condición (a) justifica la idea de que en  $\models_{V\wedge}$  las premisas han de leerse de manera disyuntiva, y las conclusiones de manera conjuntiva. Las restantes condiciones no necesitan explicación. A lo anterior, vale la pena agregar el siguiente dato curioso:  $\Gamma \models_{V\wedge} \emptyset$  y  $\emptyset \models_{V\wedge} \Gamma$  para cualquier  $\Gamma$ —el sistema no es trivial porque, claro está, invalida transitividad.

La información que hasta el momento hemos recopilado de todas nuestras lógicas puede leerse de manera más fácil en el Cuadro 2.1, en donde las tildes indican validez global, y las cruces invalidez global.

Cuadro 2.1: (In)valideces globales de las múltiples lógicas clásicas

	$\models_{\wedge\wedge}$ (CCL)	$\models_{\vee\vee}$	$\models_{\wedge\vee}$ (MCL)	$\models_{\vee\wedge}$
ID	✓	✓	✗	✗
Tr	✓	✓	✗	✗
LW	✓	✗	✓	✗
RW	✗	✓	✓	✗
LaW	✗	✓	✗	✓
RaW	✓	✗	✗	✓

A partir del cuadro, es fácil extraer la siguiente moraleja, en donde los símbolos  $\wedge$  y  $\vee$  están utilizados de la manera obvia para facilitar la lectura:

- La lectura  $\wedge$  de las premisas valida LW e invalida LaW
- La lectura  $\vee$  de las premisas valida LaW e invalida LW
- La lectura  $\wedge$  de las conclusiones valida RaW e invalida RW
- La lectura  $\vee$  de las conclusiones valida RW e invalida RaW

Creo que resulta iluminador leer los enunciados del tipo “ $\Gamma$  implica  $\Delta$ ” como “Para cualquier interpretación del lenguaje, o  $\Gamma$  es falso, o  $\Delta$  es verdadero”. Así, podemos justificar las anteriores condiciones por medio de los siguientes truismos:

- La falsedad de  $A \wedge B$  implica la falsedad de  $A \wedge B \wedge C$ , pero no la de  $A$ .
- La falsedad de  $A \vee B$  implica la falsedad  $A$ , pero no la de  $A \vee B \vee C$ .
- La verdad de  $A \wedge B$  implica la verdad de  $A$ , pero no la de  $A \wedge B \wedge C$ .
- La verdad de  $A \vee B$  implica la verdad de  $A \vee B \vee C$ , pero no la de  $A$ .

Es decir, muchas de las propiedades estructurales de las distintas lógicas clásicas (en particular, todas que tienen que ver con la adición o sustracción de premisas o conclusiones) se explican de manera prístina apelando a hechos de preservación de verdad/falsedad entre conjunciones/disjunciones de distintas aridades. En este sentido, la ‘lógica’ de las conjunciones y disjunciones es iluminadora a la hora de analizar el comportamiento estructural de las relaciones de consecuencia. Por su parte, el comportamiento estructural de las relaciones de consecuencia proporciona una nueva manera de ilustrar la conocida

dualidad que existe entre conjunciones y disyunciones: las reglas estructurales que las conjunciones validan son exactamente las que las disyunciones invalidan, y *viceversa*.

La dualidad no es una relación que se dé sólo entre operadores del lenguaje objeto (como en el caso de la conjunción y la disyunción). También puede darse entre lógicas. De hecho, hay lógicas que son duales consigo mismas, algo que se suele considerar como positivo en la literatura. Cuando Beall y Restall (2006, p. 14) analizan si vale la pena trabajar con sistemas de conclusiones múltiples, dicen:

The virtue of the idea is its elegance. A profound symmetry emerges when one considers arguments involving multiple premises and multiple conclusions. The natural reading of validity for arguments with this structure takes an argument to be valid when the truth of all of the premises guarantees the truth of some of the conclusions. The symmetry emerges when one notices that valid arguments may be inverted: the untruth of all of the conclusions guarantees the untruth of some of the premises.

Para expresar lo anterior de manera más sucinta, introducimos una definición:

**Definición 59.** Dos relaciones de consecuencia  $\models_1$  y  $\models_2$  son *negación-duales* si y sólo si se da que  $\Gamma \models_1 \Delta$  si y sólo si  $\neg(\Delta) \models_2 \neg(\Gamma)$

Lo que Beall y Restall notan es que **MCL** es auto-negación-dual, es decir,  $\Gamma \models_{\text{MCL}} \Delta$  si y sólo si  $\neg(\Delta) \models_{\text{MCL}} \neg(\Gamma)$ . Esto sería deseable porque revela una profunda simetría y elegancia (sic). Hay que notar que **CCL** carece de tan encomiable propiedad:

**Hecho 26.** La relación  $\models_{\text{CCL}}$  no es auto-negación-dual

(Por ejemplo,  $p, q \models_{\text{CCL}} p$ , pero  $\neg p \not\models_{\text{CCL}} \neg p, \neg q$ ). ¿Debemos concluir que **CCL** es menos atractiva que **MCL**? Creo que no. La razón es que contamos con una relación de dualidad alternativa, que nos permite argumentar en favor de **CCL**.

**Definición 60.** Dos relaciones de consecuencia  $\models_1$  y  $\models_2$  son *disyunción-negación-duales* si y sólo si, para cualesquiera  $\Gamma$  y  $\Delta$  finitos,  $\Gamma \models_1 \Delta$  si y sólo si  $\bigvee \neg(\Delta) \models_2 \bigvee \neg(\Gamma)$

Es fácil ver que **CCL** es auto-disyunción-negación dual, pero **MCL** no:

**Hecho 27.** La relación  $\models_{\mathbf{CCL}}$  es auto-disyunción-negación-dual

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma \models_{\mathbf{CCL}} \Delta$ , con  $\Gamma$  y  $\Delta$  finitos. Supongamos que una interpretación  $v$  asigna 1 a la oración  $\bigvee \neg(\Delta)$ . Luego,  $v$  asigna 0 a alguna  $\delta \in \Delta$  (por la semántica de  $\bigvee$  y  $\neg$ ). Así,  $v$  asigna 0 a alguna  $\gamma \in \Gamma$  (por definición de  $\models_{\mathbf{CCL}}$ ). Por ende,  $v$  asigna 1 a la oración  $\bigvee \neg(\Gamma)$  (por semántica de  $\bigvee$  y  $\neg$  otra vez). La interpretación  $v$  era arbitraria, por lo que concluimos  $\bigvee \neg(\Delta) \models_{\mathbf{CCL}} \bigvee \neg(\Gamma)$ . La converso se obtiene con un razonamiento similar.  $\square$

**Hecho 28.** La relación  $\models_{\mathbf{MCL}}$  no es auto-disyunción-negación-dual

(Por ejemplo,  $p \models_{\mathbf{MCL}} \{p, q\}$ , pero  $\neg p \vee \neg q \not\models_{\mathbf{MCL}} \neg p$ ) Según la noción de disyunción-negación-dualidad, es **CCL** y no **MCL** la que ostenta profunda simetría y elegancia.<sup>10</sup>

No quiero sugerir con lo anterior que **CCL** es preferible a **MCL** (a eso dedico toda la Parte II). Más bien, sugiero que, en lo que respecta a la auto-dualidad, ambos sistemas son igual de satisfactorios. La auto-dualidad de **MCL** y la de **CCL** son igual de relevantes, porque ambas capturan la misma idea intuitiva acerca de la relación de consecuencia lógica. La idea en cuestión es que, si entendemos la consecuencia lógica como una suerte de condicional estricto, ese condicional contrapone. En términos más gráficos: usemos  $\rightarrow$  como símbolo genérico para denotar la consecuencia lógica. La auto-negación-dualidad de **MCL** nos dice que si  $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$  entonces  $(\neg C \wedge \neg D) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ . La auto-disyunción-negación dualidad de **CCL** nos dice que si  $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge D)$ , entonces  $(\neg C \vee \neg D) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ . Ambos enunciados son igual de correctos.

Para cerrar este apartado, exhibo algunos resultados de (no) dualidad que se dan entre las varias relaciones de consecuencia que expusimos, y que podrían resultar interesantes.

**Hecho 29.** Las relaciones  $\models_{\mathbf{CCL}}$  y  $\models_{\mathbf{VV}}$  son negación-duales.

*Demostración.* Asumamos que  $\Gamma \models_{\mathbf{VV}} \Delta$ . Supongamos que hay una interpretación  $v$  tal que  $v(\neg(\Delta)) \subseteq \{1\}$ . Luego,  $v$  asigna 0 a todas las oraciones en  $\Delta$  (por la semántica

<sup>10</sup>La auto-dualidad de **CCL** se puede caracterizar de varias maneras. Por ejemplo, **CCL** también satisface lo que cabría denominar *auto-negación-conjunción-dualidad*:  $\Gamma \models_{\mathbf{CCL}} \Delta$  si y sólo si  $\neg \wedge(\Delta) \models_{\mathbf{CCL}} \neg \wedge(\Gamma)$ . Quizás, esta o alguna otra caracterización alternativa es más intuitiva que la que doy en el cuerpo del texto. Pero no encuentro razones conceptuales de peso por las que alguna de las caracterizaciones sea superior.

de  $\neg$ ). Así,  $v$  asigna 0 a todas las oraciones en  $\Gamma$  (por definición de  $\models_{VV}$ ). Por ende,  $v(\neg(\Gamma)) \subseteq \{1\}$  (por la semántica de  $\neg$  otra vez). La interpretación  $v$  era arbitraria, por lo que concluimos  $\neg(\Delta) \models_{CCL} \neg(\Gamma)$ . La converso se obtiene de manera similar.  $\square$

**Hecho 30.** Las relaciones  $\models_{\wedge V}$  y  $\models_{V\wedge}$  no son negación-duales.

*Demostración.*  $\{p, q\} \models_{\wedge V} \{q, r\}$ , pero  $\{\neg q, \neg r\} \not\models_{V\wedge} \{\neg p, \neg q\}$ .  $\square$

**Hecho 31.** La relación  $\models_{V\wedge}$  es auto-negación-dual.

*Demostración.* Asumamos que  $\Gamma \models_{V\wedge} \Delta$ . Supongamos que hay una interpretación  $v$  tal que  $v(\neg(\Delta)) \not\subseteq \{0\}$ . Luego,  $v$  asigna 0 a algún  $\delta \in \Delta$  (por la semántica de  $\neg$ ). Así,  $v(\Gamma) \subseteq \{0\}$  (por definición de  $\models_{V\wedge}$ ). Por ende,  $v(\neg(\Gamma)) = 1$  (por la semántica de  $\neg$  otra vez). La interpretación  $v$  era arbitraria, por lo que concluimos  $\neg(\Delta) \models_{VV} \neg(\Gamma)$ . La converso se obtiene por medio de un razonamiento similar.  $\square$

**Definición 61.** Dos relaciones de consecuencia  $\models_1$  y  $\models_2$  son *conjunción-negación-duales* si y sólo si, para cualesquiera  $\Gamma$  y  $\Delta$  finitos,  $\Gamma \models_1 \Delta$  si y sólo si  $\wedge \neg(\Delta) \models_2 \wedge \neg(\Gamma)$

**Hecho 32.** La relación  $\models_{VV}$  es auto-conjunción-negación-dual.

*Demostración.* Asumamos que  $\Gamma \models_{VV} \Delta$ . Supongamos que hay una interpretación  $v$  tal que  $v(\wedge \neg(\Delta)) \not\subseteq \{0\}$ . Luego,  $v$  asigna 0 a toda oración en  $\Delta$  (por la semántica de  $\neg$  y  $\wedge$ ). Así,  $v$  asigna 0 a toda oración en  $\Gamma$  (por definición de  $\models_{VV}$ ). Por ende,  $v(\wedge \neg(\Gamma)) \not\subseteq \{0\}$ . La interpretación  $v$  era arbitraria, por lo que concluimos  $\wedge \neg(\Delta) \models_{VV} \wedge \neg(\Gamma)$ . La converso se obtiene por medio de un razonamiento similar.  $\square$

### 2.2.2. Unión, intersección y estructuralidad

Todas las lógicas ‘clásicas’ de conclusiones múltiples que vimos son contralógicas unas de otras—es decir, a la vez sublógicas y superlógicas. Digamos que una lógica es una *superlógica estricta* de otra si y sólo si es una superlógica y no una sublógica, y es una *sublógica estricta* de otra si y sólo si es una sublógica y no una superlógica. A continuación, presento un sistema que es una superlógica estricta, y otro que es una sublógica estricta, de todas las lógicas ‘clásicas’ anteriores.

En lo que va del trabajo, consideramos lecturas tanto conjuntivas como disyuntivas, tanto de las conclusiones como de las premisas. Sin embargo, hemos operado siempre bajo el supuesto de que, dada cualquier relación de consecuencia, y dado cualquier argumento, las premisas y conclusiones del argumento reciben siempre una lectura determinada, en el sentido de que es posible decidir si se leen de manera conjuntiva o disyuntiva, y una lectura unívoca, en el sentido de que nunca se leen de ambas maneras a la vez. Para dejar más en claro a qué me refiero, me remito a un ejemplo. Recordemos nuestra definición informal de validez en **CCL**: “ $\Gamma$  implica  $\Delta$  en **CCL** si y sólo si, siempre que todas las premisas en  $\Gamma$  son verdaderas, todas las conclusiones en  $\Delta$  lo son”. Contrastemos, ahora, la anterior definición con la siguiente:

( $\star$ )  $\Gamma$  implica  $\Delta$  si y sólo si, siempre que las premisas en  $\Gamma$  son todas verdaderas, *alguna o todas* las conclusiones en  $\Delta$  lo son.

En la definición de **CCL**, es claro que las conclusiones reciben una lectura conjuntiva o universal. En ( $\star$ ), en cambio, no podríamos decir lo mismo. Dado un argumento del tipo  $\langle \Gamma, \{ \top, \perp \} \rangle$ , en toda valuación las conclusiones satisfacen los estándares que ( $\star$ ) les impone, a pesar de que al menos una conclusión es falsa. Tampoco podríamos decir, claro está, que en ( $\star$ ) las conclusiones son leídas de manera disyuntiva o existencial: dado un argumento del tipo  $\langle \Gamma, \emptyset \rangle$ , en toda valuación las conclusiones satisfacen los estándares que ( $\star$ ) les impone, a pesar de que ninguna es verdadera. Caracterizo este fenómeno diciendo que ( $\star$ ) no impone una lectura *determinada* a las conclusiones. Consideremos, ahora, la definición siguiente:

( $\star\star$ )  $\Gamma$  implica  $\Delta$  si y sólo si, para toda interpretación, siempre que las premisas en  $\Gamma$  son todas verdaderas, *alguna y todas* las conclusiones en  $\Delta$  lo son.

En la definición de **CCL**, es claro que las conclusiones *no* reciben una lectura disyuntiva. En ( $\star\star$ ), en cambio, no podríamos decir lo mismo. Dado un argumento del tipo  $\langle \Gamma, \emptyset \rangle$ , en toda valuación las conclusiones infringen los estándares que ( $\star\star$ ) les impone, dado que no hay alguna que sea verdadera. Tampoco podríamos decir, claro, que las conclusiones *no* son leídas de manera conjuntiva: dado un argumento del tipo  $\langle \Gamma, \{ \top, \perp \} \rangle$ , en toda valuación las conclusiones infringen los estándares que ( $\star\star$ ) les impone, dado que al

menos una es falsa. Caracterizo este fenómeno diciendo que  $(\star\star)$  no impone una lectura *unívoca* de las conclusiones.<sup>11</sup>

Lo dicho respecto de las conclusiones aplica *mutatis mutandi* a las premisas. Abandonar el supuesto de que premisas y conclusiones siempre se leen de manera determinada y unívoca nos abre un abanico de nuevas posibilidades a la hora de definir relaciones de consecuencia. En particular, nos permite definir los dos sistemas que introduzco en este apartado, y a los cuales me aboco a continuación.

Comenzamos con la superlógica estricta de todas nuestras lógicas clásicas. Por razones que se harán evidentes en breve, la denomino  $\mathbf{CL}^U$ :

**Definición 62.** La relación  $\models_U \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_U \Delta \text{ si y sólo si, } \forall v \in \mathbf{v}, \text{ si } v(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ y } v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}, \\ \text{ entonces } v(\Delta) \subseteq \{1\} \text{ o } v(\Delta) \not\subseteq \{0\}.$$

En términos informales, la definición se parafrasea como sigue: un argumento es  $\models_U$ -válido si y sólo si, siempre que todas y alguna de las premisas es verdadera, todas o alguna de las premisas es verdadera también. Así,  $\mathbf{CL}^U$  impone una lectura no unívoca de las premisas y una lectura no determinada de las conclusiones.

$\mathbf{CL}^U$  es una superlógica de todas las lógicas que nos conciernen:

**Hecho 33.**  $\models_U$  valida argumentos que las siguientes relaciones invalidan:

- (a)  $\models_{\wedge\wedge}$  (v.g.  $p \not\models_{\wedge\wedge} p, q$ , pero  $p \models_U p, q$ )
- (b)  $\models_{\wedge\vee}$  (v.g.  $p \not\models_{\wedge\vee} \emptyset$ , pero  $p \models_U \emptyset$ )
- (c)  $\models_{\vee\vee}$  (símil (b))
- (d)  $\models_{\vee\wedge}$  (símil (a))

A continuación mostramos que es una superlógica estricta:

<sup>11</sup>Dicho en otros términos. Cuando la lectura es no determinada, no es *necesario* satisfacer la lectura conjuntiva, y tampoco es necesario satisfacer la lectura disyuntiva, para satisfacer el estándar impuesto (basta con satisfacer uno de los dos). Cuando la lectura es no unívoca, no es *suficiente* con satisfacer la lectura conjuntiva sola, y tampoco es suficiente con satisfacer la lectura disyuntiva sola, para satisfacer el estándar (es preciso satisfacer ambas).

**Teorema 34.**  $\models_U = (\models_{\wedge\wedge} \cup \models_{\wedge\vee} \cup \models_{\vee\vee} \cup \models_{\vee\wedge})$

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma \not\models_U \Delta$ . Luego, hay una interpretación  $v$  tal que  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$ , y  $v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}$ , y  $v(\Delta) \subseteq \{0\}$ , y  $v(\Delta) \not\subseteq \{1\}$ . La interpretación  $v$  es un contraejemplo al argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  tanto en  $\models_{\wedge\wedge}$ , como en  $\models_{\wedge\vee}$ , como en  $\models_{\vee\vee}$ , como en  $\models_{\vee\wedge}$ . Así, el argumento mencionado no está en la unión de esas relaciones. Supongamos, ahora, que el argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  no está en la unión de las relaciones mencionadas. Sabemos que hay al menos una interpretación  $v$  tal que  $v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}$  (porque  $\Gamma \not\models_{\vee\vee} \Delta$ ); luego,  $\Gamma$  es no vacío, y para cualquier interpretación  $v$ , si  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$ , entonces  $v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}$ . También sabemos que hay al menos una interpretación  $v$  tal que  $v(\Delta) \not\subseteq \{1\}$  (porque  $\Gamma \not\models_{\vee\wedge} \Delta$ ); luego,  $\Delta$  es no vacío, y para cualquier interpretación  $v$ , si  $v(\Delta) \subseteq \{0\}$ , entonces  $v(\Delta) \not\subseteq \{1\}$ . Por último, sabemos que hay al menos una interpretación  $v$  tal que  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$  y  $v(\Delta) \subseteq \{0\}$  (porque  $\Gamma \not\models_{\wedge\vee} \Delta$ ); por lo anterior, se sigue que  $v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}$  y  $v(\Delta) \not\subseteq \{1\}$ . Por lo tanto,  $\Gamma \not\models_U \Delta$ .  $\square$

Ahora, pasamos a la sublógica estricta de todas nuestras lógicas clásicas. Por razones que la lectora imagina, la denomino  $\mathbf{CL}^\cap$ :

**Definición 63.** La relación  $\models_\cap \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{L})$  se define como sigue:

$$\Gamma \models_\cap \Delta \text{ si y sólo si, } \forall v \in \mathbf{v}, \text{ si } v(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ o } v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}, \\ \text{entonces } v(\Delta) \subseteq \{1\} \text{ y } v(\Delta) \not\subseteq \{0\}.$$

En términos informales, la definición se parafrasea como sigue: un argumento es  $\models_\cap$ -válido si y sólo si, siempre que todas o alguna de las premisas es verdadera, todas y alguna de las premisas es verdadera también. Así,  $\mathbf{CL}^\cap$  impone una lectura no determinada de las premisas, y una lectura no unívoca de las conclusiones.

$\mathbf{CL}^\cap$  es una sublógica de todas las lógicas que nos conciernen:

**Hecho 35.**  $\models_\cap$  invalida argumentos que las siguientes relaciones validan:

- (a)  $\models_{\wedge\wedge}$  (v.g.  $p, q \models_{\wedge\wedge} q$ , pero  $p, q \not\models_\cap q$ )
- (b)  $\models_{\wedge\vee}$  (símil (a))
- (c)  $\models_{\vee\vee}$  (v.g.  $\emptyset \models_{\vee\vee} p$ , pero  $\emptyset \not\models_\cap p$ )
- (d)  $\models_{\vee\wedge}$  (símil (c))

A continuación mostramos que es una sublógica estricta:

**Teorema 36.**  $\models_{\cap} = (\models_{\wedge\wedge} \cap \models_{\wedge\vee} \cap \models_{\vee\vee} \cap \models_{\vee\wedge})$

*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma \not\models_{\cap} \Delta$ . Entonces, hay una interpretación  $v$  que satisface al menos una de las siguientes cuatro condiciones: (i)  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$  y  $v(\Delta) \not\subseteq \{1\}$ , en cuyo caso  $\Gamma \not\models_{\wedge\wedge} \Delta$ , (ii)  $v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}$  y  $v(\Delta) \not\subseteq \{1\}$ , en cuyo caso  $\Gamma \not\models_{\vee\wedge} \Delta$ , (iii)  $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$  y  $v(\Delta) \subseteq \{0\}$ , en cuyo caso  $\Gamma \not\models_{\wedge\vee} \Delta$ , (iv)  $v(\Gamma) \not\subseteq \{0\}$  y  $v(\Delta) \subseteq \{0\}$ , en cuyo caso  $\Gamma \not\models_{\vee\vee} \Delta$ . En los cuatro casos, el argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  no está en la intersección que nos concierne. La converso se prueba con un razonamiento similar.  $\square$

$\mathbf{CL}^{\cup}$  y  $\mathbf{CL}^{\cap}$  son, entonces, la unión y la intersección de las varias lógicas que podemos definir cuando partimos de la definición de consecuencia lógica clásica y ‘jugamos’ con las lecturas conjuntivas y disyuntivas de conclusiones y premisas. Pero además de esa particularidad en el nivel de los argumentos,  $\mathbf{CL}^{\cup}$  y  $\mathbf{CL}^{\cap}$  tienen un comportamiento estructural que considero bastante interesantes:

**Hecho 37.**  $\models_{\cup}$  valida globalmente los siguientes principios estructurales:

- ID

e invalida los siguientes:

- Tr (v.g.  $p \models_{\cup} \emptyset$ , y  $\emptyset \models_{\cup} q$ , pero  $p \not\models_{\cup} q$ )
- LW (v.g.  $\emptyset \models_{\cup} q$ , pero  $p \not\models_{\cup} q$ )
- LaW (v.g.  $p, q \models_{\cup} p$ , pero  $q \not\models_{\cup} p$ )
- RW (v.g.  $p \models_{\cup} \emptyset$ , pero  $p \not\models_{\cup} q$ )
- RaW (v.g.  $p \models_{\cup} p, q$ , pero  $p \not\models_{\cup} q$ )

A pesar de que recupera todas las valideces de las otras lógicas clásicas—o mejor, *debido* a que lo hace sin trivialidad— $\mathbf{CL}^{\cup}$  resulta ser una lógica profundamente subestructural. Los contraejemplos a RW y LW son relativamente marginales, dado que se limitan a casos en que el conjunto de oraciones a ser debilitado es el vacío: para cualesquiera  $\Gamma, \Delta \neq \emptyset$ , si  $\Gamma \models_{\cup} \Delta$  entonces,  $\Gamma \cup \Sigma \models_{\cup} \Delta$  y  $\Gamma \models_{\cup} \Delta \cup \Sigma$ , para cualquier  $\Sigma$ .<sup>12</sup> Los fallos

<sup>12</sup>A pesar de ser marginales en el sentido descrito, los fallos de LW y RW son esenciales para evitar la trivialidad, dado que  $\emptyset \models_{\cup} \emptyset$ .

de transitividad, en cambio, son un fenómeno generalizado (y en este sentido,  $\mathbf{CL}^{\cup}$  es análoga a  $\mathbf{MCL}$ ).

**Hecho 38.**  $\models_{\cap}$  valida globalmente los siguientes principios estructurales:

- Tr
- RaW
- LaW

e invalida los siguientes:

- ID (v.g.  $p, q \not\models_{\cap} p, q$ )
- LW (v.g.  $p \models_{\cap} p$ , pero  $p, q \not\models_{\cap} p$ )
- RW (v.g.  $p \models_{\cap} p$ , pero  $p \not\models_{\cap} p, q$ )

En lo que respecta a la adición y sustracción de premisas (esto es, las reglas RW, LW, RaW y LaW), el comportamiento de  $\mathbf{CL}^{\cap}$  es idéntico al de  $\mathbf{CL}^{\vee \wedge}$ . Creo que, para los casos de premisas y conclusiones no vacías, lo anterior se puede explicar como sigue. En el estándar para premisas tenemos una disyunción (“Si alguna o todas las premisas son verdaderas,...”). El disyunto más fácil de satisfacer—es decir, el que más contraejemplos nos proporciona—es el que impone una lectura disyuntiva. Por eso, del lado de las premisas  $\mathbf{CL}^{\cap}$  se comporta de manera disyuntiva: valida LaW e invalida LW. Por otro lado, en el estándar para conclusiones tenemos una conjunción (“...alguna y todas las conclusiones son verdaderas”). El conyunto más difícil de satisfacer—es decir, el que menos contraejemplos nos evita—es el que impone una lectura conjuntiva. Por eso, del lado de las conclusiones  $\mathbf{CL}^{\cap}$  se comporta de manera conjuntiva: valida RaW e invalida RW.

Hasta ahora, hemos analizado con algún detalle las propiedades estructurales de varios sistemas. Además, algunas de estas propiedades jugarán un papel importante en mi motivación filosófica de  $\mathbf{CCL}$ , en la Parte II. Por eso, considero pertinente realizar algunas reflexiones sobre la noción misma de estructuralidad. En particular, me interesa centrarme en lo siguiente. En los últimos años, se produjo una vasta literatura en torno a las lógicas subestructurales—sus propiedades, aplicaciones y aspectos filosóficos. Es notable, sin embargo, que poca o ninguna atención se destinó a analizar las que pudieran denominarse lógicas *superestructurales*. ¿Cómo definimos una lógica superestructural?

¿Es **CCL** superestructural? ¿Es la superestructuralidad un atributo deseable o indeseable?

A tales cuestiones dedico lo que resta del presente apartado.

Creo que hay al menos dos sentidos en los que, en la actualidad, se suele decir que una lógica es (o no es) estructural. Uno es un sentido absoluto, el otro un sentido relativo. Analizo cada uno en orden.

El sentido absoluto de estructuralidad está dado por ciertas propiedades que caracterizan a nuestra noción intuitiva de consecuencia lógica—es decir, propiedades que esperamos que toda relación de consecuencia lógica tenga— y que no involucran, o al menos no lo hacen de manera explícita, manipulación de constantes lógicas del lenguaje objeto. La doctrina predominante acerca de cuales son las propiedades en cuestión es herencia directa de los trabajos de Tarski, y enseña que toda relación de consecuencia ha de ser reflexiva, transitiva, monótona e invariable bajo sustitución (cf. Jansana, 2016; Tarski, 1983a); como ha de estar formulada sobre conjuntos, también ha de validar contracción (i.e. LC y RC) y las siguiente reglas de ‘Intercambio’:

$$\text{LE } \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{RE } \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}$$

(Las etiquetas son por ‘Left Exchange’ y ‘Right Exchange’.) En este sentido absoluto de estructuralidad, serían subestructurales todas y sólo aquellas lógicas que fallen en satisfacer alguno de los anteriores requisitos.

No es mi intención aquí determinar si la visión ortodoxa está justificada o no. Me limito a analizar si, dada esta visión, la lógica **CCL** es estructural. Y mi respuesta es positiva; de hecho, sugiero que, en la medida que la estructuralidad sea algo que se da en grados, podríamos incluso decir que **CCL** es *más* estructural que la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**. Mis razones para decir que **CCL** es estructural son simples: es invariable bajo sustitución, satisface Contracción, Intercambio, y también reflexividad y transitividad irrestricta en el sentido usual (i.e. relación-teórico) de los términos. Por último, valida Debilitamiento Izquierdo, por lo que, en términos intuitivos, es todo lo monótona que debería ser, provisto que leemos las conclusiones de manera conjuntiva.

Mis razones para decir que **CCL** podría ser considerada más estructural que **MCL** no son mucho más abstrusas. Recordemos que la lógica clásica de conclusiones simples, **CL**,

no es transitiva y reflexiva en el sentido usual de los términos; esto no lo consideramos un problema (i.e. una ‘falla de estructuralidad’) porque su relación de consecuencia  $\models_{\text{CL}}$ , al tener un dominio y un codominio diferentes, simplemente no es el tipo de cosa que pueda ser reflexiva y transitiva. Ahora bien, **MCL** *sí* podría ser reflexiva y transitiva—el dominio y codominio de su relación de consecuencia  $\models_{\text{MCL}}$  coinciden—y sin embargo viola los principios de reflexividad y transitividad. Luego, si pensamos que una relación de consecuencia es estructural en la medida que sea ‘todo lo reflexiva, transitiva y monótona que puede ser’, entonces podemos decir que **CCL** es más estructural que **MCL**.

Dada la noción absoluta de estructuralidad, no es obvio para mí qué sería una ‘lógica superestructural’. En principio, diríamos que es un sistema que valida más principios estructurales que los característicos de toda relación de consecuencia. La pregunta es, ¿sería ese sistema una *lógica*? La noción absoluta de estructuralidad tiene un cierto matiz normativo o ‘ejemplar’: describe cómo ha de ser una relación para recibir el título honorífico de ‘consecuencia lógica’. Pero no es claro si el conjunto de principios que heredamos de la tradición (reflexividad, transitividad, etc.) se entiende o no como una descripción exhaustiva de los principios estructurales que una lógica *debe y puede* validar. Si se entiende de esa manera, entonces los sistemas superestructurales no serían lógicas, sino teorías en el mejor de los casos. Si no se entiende de esa manera, habría lugar para algo como ‘lógicas superestructurales’.

Pasemos al sentido de estructuralidad que caractericé como relativo. En la literatura, se suele decir que son estructurales aquellas lógicas que validan los mismos principios estructurales que la lógica clásica, y subestructurales aquellas que invalidan al menos un principio estructural que la lógica clásica valida. Muchas veces, esta manera de hablar se usa sólo como un medio de clasificación y clarificación, sin carga valorativa. En este sentido, cuando decimos que **ST** es subestructural, queremos decir que es subestructural *respecto de la lógica clásica*, pero no tenemos en mente que **ST** falle en satisfacer algunos principios característicos de toda relación de consecuencia. La lógica clásica se usa como parámetro de referencia (o como ‘metro patrón’) por una mera cuestión de comodidad: es el sistema más difundido, estudiado y aplicado con el que contamos. Pero la noción no

valorativa de estructuralidad puede ser bien entendida como una *relación* entre sistemas. Podríamos definirla como sigue:

**Definición 64.** Una relación de consecuencia  $\models_1$  es *subestructural* respecto de otra  $\models_2$  (o  $\models_2$ -*subestructural*) si y sólo si invalida algún principio estructural que  $\models_2$  valida.<sup>13</sup>

Dada esta definición, podemos decir que **CCL** es **MCL**-subestructural (v.g. no valida RW), y **MCL** es **CCL**-subestructural (v.g. no valida RaW). Extender el enfoque para cubrir la noción de superestructuralidad es sencillo:

**Definición 65.** Una relación de consecuencia  $\models_1$  es *superestructural* respecto de otra  $\models_2$  (o  $\models_2$ -*superestructural*) si y sólo si valida algún principio estructural que  $\models_2$  invalida.

Es claro que dos lógicas pueden ser al mismo tiempo subestructurales y superestructurales una de la otra. (Tómense, otra vez, **CCL** y **MCL**.) Cuando esto sucede, podemos decir que las lógicas en cuestión son *contraestructurales* entre sí:

**Definición 66.** Dos relaciones de consecuencia  $\models_1$  y  $\models_2$  son *contraestructurales* una de la otra si y sólo  $\models_1$  valida al menos un principio estructural que  $\models_2$ , y *viceversa*,  $\models_2$  valida al menos un principio estructural inválido en  $\models_1$ .

Así entendidas, las nociones de sub, super y contraestructuralidad están perfecta analogía con las tradicionales nociones de sublógica, supralógica y lógica divergente o contralógica (cf. Sec. 2.2.1). Considero que esta concordancia entre ambas familias de nociones resulta iluminadora, y contribuye a unificar terminologías que, de otro modo, no se relacionaban de manera del todo clara.

---

<sup>13</sup>Esta definición podría encontrarse con casos difíciles, dado que la noción misma de ‘principio estructural’ es vaga. Por ejemplo, es bien sabido que, si tomamos el cálculo LK para la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar (cf. Gentzen, 1934–35) y lo restringimos a conclusiones simples, obtenemos la lógica intuicionista. ¿Podemos decir entonces que la lógica intuicionista es subestructural? ¿Es la cantidad de conclusiones permitida un ‘principio estructural’? Algunos autores sugieren respuestas afirmativas, pero no parece haber un consenso establecido.

Para terminar, cabe ilustrar las anteriores definiciones por medio de algunos ejemplos. **ST** es **CL**-subestructural, aunque no es una sublógica de **CL**. **TS** y **ST** son contraestructurales entre sí, aunque no son contralógicas, porque todo argumento válido en **TS** es también válido en **ST**. Las relaciones vistas en la Sección 2.2.1 (i.e.  $\models_{\wedge\wedge}$ ,  $\models_{\wedge\vee}$ ,  $\models_{\vee\vee}$  y  $\models_{\vee\wedge}$ ) son todas tanto contraestructurales como contralógicas unas de otras.

Por último, digamos que una lógica es sub(super)estructural *estricta* respecto de otra si y sólo si es sub(super)estructural pero no super(sup)estructural. Tenemos entonces que la relación  $\models_{\cap}$  es una sublógica estricta de todas las relaciones mencionadas en el párrafo anterior, pero no es subestructural estricta respecto de ninguna. A la inversa,  $\models_{\cup}$  es una superlógica estricta de todas (Teorema 34), pero no así superestructural estricta de alguna.

Una línea de investigación que considero interesante a futuro es ver si existen lógicas que, sin ser triviales, sean *superestructurales estrictas* respecto de, ya sea la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**, ya sea la lógica clásica de conclusiones múltiples conjutivas, **CCL**. Si tales sistemas existieran, podríamos quizás pensar que el resultado limitativo de Post (1921) para extensiones inferenciales de la lógica clásica proposicional no aplica para extensiones estructurales de esta misma lógica.

## **Parte II**

### **Motivación Filosófica**

### 3. Validez vernácula

---

In considerations of a general theoretical nature the proper concept of consequence must be placed in the foreground.

---

Alfred Tarski ([1936/1983b](#)),

“On the Concept of Logical Consequence”

Las lógicas *puras* no son más que objetos matemáticos abstractos. Esos objetos admiten y de hecho reciben múltiples aplicaciones, como por ejemplo modelar circuitos eléctricos (lógica clásica proposicional), o describir la estructura gramatical de los lenguajes (cálculo Lambek). Ahora bien, es claro que una de las aplicaciones más importantes que reciben las lógicas puras consiste en describir y/o prescribir la manera en que razonamos y hemos de razonar en el lenguaje natural; en otras palabras, modelar nuestro concepto intuitivo de *consecuencia lógica* o *validez*. Algunos autores sostienen incluso que esta es la aplicación canónica de la lógica. Priest, por ejemplo ([2006](#), p. 196), escribe

Let us now turn to the most important and traditional application of a pure logic. This is what (...) I called the *canonical application*: the application of a logic in the analysis of reasoning (...) The central purpose (...) is to determine what follows from what—what premises support what conclusions—and why. An argument where this is, in fact, the case is *valid*.

Como (casi) toda tesis filosófica, la idea de que las lógicas poseen algo así como una aplicación canónica carece de consenso unánime.<sup>1</sup> Sin embargo, hay un amplio acuerdo

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, Eklund ([2017](#)) duda del interés filosófico del proyecto consistente en modelar el razonamiento ordinario, y Glanzberg ([2015](#)) sugiere que en el lenguaje natural no hay una genuina relación de consecuencia a ser modelada.

en que al menos uno de los importantes usos que suelen recibir las lógicas consiste en modelar nuestra noción intuitiva de consecuencia. En este capítulo sostengo que, en este respecto, el enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples corre con clara ventaja frente al enfoque disyuntivo.

El capítulo está organizado en dos partes. En la Sección 3.1, argumento que el enfoque disyuntivo postula entidades que no existen en el lenguaje natural, dado que el razonamiento ordinario no presenta argumentos con conclusiones múltiples disyuntivas. El mismo cargo, sin embargo, no afecta al enfoque conjuntivo. En la Sección 3.2, argumento que el enfoque disyuntivo se desempeña peor que el conjuntivo a la hora de capturar nuestras intuiciones preteóricas acerca de la validez. Mi explicación de por qué esto ocurre es que, bajo el enfoque disyuntivo, la relación de equivalencia lógica no es una genuina relación de equivalencia.

## 3.1. Conclusiones en la Naturaleza

En esta sección, comparamos al enfoque disyuntivo y conjuntivo en lo que toca al nivel de idealización en que incurren o no al postular la existencia de conclusiones múltiples.

### 3.1.1. El enfoque disyuntivo

Bastantes autores opinan que no hay argumentos con conclusiones múltiples disyuntivas en el lenguaje natural.<sup>2</sup> Gareth Evans, por ejemplo, expresa la siguiente preocupación,<sup>3</sup> que cito *in extenso* por su relevancia para el asunto que nos concierne:

We can assert a number of premises as a series ‘ $A_1, A_2, \dots, A_n$ ’. Each stage ‘ $A_1, \dots, A_i$ ’ of this is complete in itself and independent of what may follow: the subsequent assertions merely add to the commitment represented by the previous ones. But if we tried to make a serial utterance ‘ $B_1, B_2, \dots, B_n$ ’ in the way required for asserting multiple conclusions, as committing us to the truth

---

<sup>2</sup>Véanse, por ejemplo, Beall y Restall (2006, p. 13), Cintula y Paoli (2016), Rumfitt (2008, p. 79), Steinberger (2011) y Tennant (2002, p. 36).

<sup>3</sup>Reconstruida en Shoesmith y Smiley (1978, p. 5).

of  $B_1$  or of  $B_2$ ... or of  $B_n$ , we should be withdrawing by the utterance of  $B_2$  the unqualified commitment to  $B_1$  into which we had apparently entered at the first stage, and so on. The utterance will therefore have to be accompanied by a warning (e.g. a prefatory 'Either') to suspend judgement until the whole series is finished, and we do not achieve a complete speech act until the utterance of the last  $B_j$ , duly marked as such. But this is much as to admit that the various  $B_j$  are functioning not as separate units of discourse but as components of a single disjunctive one.

De manera sucinta, el razonamiento de Evans es el siguiente: en un argumento con conclusiones múltiples leídas de manera disyuntiva, las premisas no brindan apoyo a ninguna conclusión en particular; luego, las conclusiones no son independientes una de la otra en el discurso, y así, a nivel práctico, cabe dudar de que en efecto sean *múltiples*. Considero que el argumento es plausible. ¿En qué sentido cada una de las conclusiones *se sigue* de las premisas, si creer en las premisas no constituye una razón para creer en la conclusión? (Vale mencionar que si asumimos que las conclusiones múltiples se leen de manera conjuntiva, el razonamiento de Evans ya no corre, dado que las premisas de hecho brindan apoyo a cada conclusión en particular.)

Restall (2005) ha sugerido, contra la ortodoxia, que al menos *algunos* argumentos del lenguaje natural pueden ser interpretados como teniendo conclusiones múltiples disyuntivas. El autor da como ejemplo el siguiente razonamiento por casos:

Supongamos que todos están o felices o cansados. Elijamos una persona. Sabemos que está o feliz o cansada. Hay dos casos. Caso (i) está feliz. Caso (ii) está cansada, y por ende alguien está cansado. En consecuencia, o esta persona está feliz o alguien está cansado. Pero la persona que elegimos era arbitraria; luego, o todos están felices o alguien que está cansado.

El razonamiento se puede formalizar con facilidad por medio de reglas de secuentes correctas respecto de la lógica clásica de conclusiones múltiples estándar, **MCL**:

$$\begin{array}{c}
\forall x(Fx \vee Cx) \Rightarrow \forall x(Fx \vee Cx) \\
\hline
\forall x(Fx \vee Cx) \Rightarrow Fa \vee Ca \\
\hline
\forall x(Fx \vee Cx) \Rightarrow Fa, Ca \\
\hline
\forall x(Fx \vee Cx) \Rightarrow Fa, \exists xCx \\
\hline
\forall x(Fx \vee Cx) \Rightarrow \forall xFx, \exists xCx \\
\hline
\forall x(Fx \vee Cx) \Rightarrow \forall xFx \vee \exists xCx
\end{array}$$

El seciente en la tercer línea de la prueba,  $\forall x(Fx \vee Cx) \Rightarrow Fa, Ca$ , modela la etapa del razonamiento en español en que tenemos dos casos activos, uno que concluye en  $Fa$  y otro que concluye en  $\exists xCx$ . Según Restall, el hecho de que el seciente en cuestión tenga conclusiones múltiples constituye evidencia en favor de que la etapa correspondiente de nuestro razonamiento en español presenta conclusiones múltiples también.

A mi juicio, sin embargo, la argumentación de Restall no es convincente. Por un lado, el razonamiento que nos propone también se puede formalizar usando reglas de deducción natural correctas respecto de la lógica clásica de conclusiones simples, **CL**:

$$\begin{array}{c}
\forall x(Fx \vee Cx) \quad [Fa]^1 \quad \frac{[Ca]^2}{\exists xCx} \\
\hline
E\vee 1,2 \quad \frac{Fa \vee Ca \quad Fa \vee \exists xCx \quad Fa \vee \exists xCx}{Fa \vee \exists xCx} \\
\hline
\forall xFx \vee \exists xCx
\end{array}$$

Por otro lado, coincido con Steinberger (2011) en que, si bien el razonamiento por casos es frecuente en la práctica inferencial cotidiana, en general no consideramos que los casos relevantes sean *conclusiones* de nuestro argumento, es decir, que *se sigan* de nuestras premisas.<sup>4</sup> Creo, entonces, que la evidencia que presenta Restall puede ser explicada por medio de conclusiones simples, y la explicación resultante es tan o más satisfactoria que la ofrecida por el autor.

Quizás, quien simpatice con las conclusiones múltiples disyuntivas podría objetar. La prueba en secientes que ofrece Restall se destaca por su simplicidad y elegancia. En cambio, la prueba que ofrecimos en deducción natural apela, en su último paso, a la regla

$$(2) \frac{Aa \vee \phi}{\forall xAx \vee \phi} \quad a \text{ no en } A(x), \phi \text{ o ssnc}$$

<sup>4</sup>En palabras del autor (p. 342): “While we may agree that everyday proofs frequently proceed by case distinctions, we certainly do not ordinarily consider the cases to be conclusions of any kind;  $Fa$  and/or  $Ca$  are not thought to follow from  $\forall x(Fx \vee Cx)$ .”

(en donde ‘ssnc’ abrevia ‘supuestos no cancelados’). El cálculo de deducción natural estándar para CL es NK. Ahora, la derivación de (2) en NK no es lo que denominaríamos trivial, como se aprecia en la Figura 3.1.1.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\phi]^4}{\frac{[\neg Aa]^2}{\text{Ev 3.4}} \frac{[Aa]^3}{\frac{\perp}{\neg Aa}} \frac{[\neg(\forall xAx \vee \phi)]^1}{\frac{\perp}{\Gamma-2}} \frac{Aa \vee \phi}{\frac{\perp}{\neg Aa}}}} \\
 \frac{\perp}{Aa} \frac{[Aa]^6}{\frac{Aa}{\forall xAx}} \frac{Aa \vee \neg Aa}{\forall xAx \vee \phi} \text{Ev 5.6}} \\
 \frac{\perp}{\neg(\forall xAx \vee \phi)} \frac{[\neg(\forall xAx \vee \phi)]^1}{\Gamma-1} \frac{[\neg(\forall xAx \vee \phi)]^7}{\text{Ev 7.8}} \frac{[\forall xAx \vee \phi]^8}{(\forall xAx \vee \phi)} \frac{(\forall xAx \vee \phi) \vee \neg(\forall xAx \vee \phi)}{(\forall xAx \vee \phi)}
 \end{array}$$

Figura 3.1: (2) en NK

Luego, la explicación de Restall parece tener, después de todo, una ventaja frente a la nuestra: preserva la simplicidad aparente del razonamiento en español. Si esto es así, quizás tengamos alguna razón para admitir conclusiones múltiples disyuntivas. Steinberger considera una objeción de este tipo, y de hecho parece conceder que la simplicidad de las derivaciones juega al menos *prima facie* a favor de Restall (p. 341–3).

Sin embargo, pienso que la objeción está desencaminada. En primer lugar, dependiendo de cuál sea el cálculo de secuentes operante, también la prueba de Restall podría utilizar reglas que, si bien derivables, no son primitivas. Por ejemplo, el cálculo de secuentes estándar para MCL es LK. Pero hay dos reglas en la prueba de Restall que no son primitivas en LK; se trata de las que permiten los pasos de  $[\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta]$  a  $[\Gamma \Rightarrow \phi, \psi, \Delta]$ , y de  $[\Gamma \Rightarrow \phi, \psi, \Delta]$  a  $[\Gamma \Rightarrow \phi \vee \psi, \Delta]$ . Las reglas se derivan con relativa facilidad en el sistema, pero, si enriquecemos la prueba original del autor con las derivaciones correspondientes, queda poco—si es que algo en

absoluto—de la simplicidad y elegancia que motivaban la objeción.

En segundo lugar, *incluso* si, dada cierta elección de cálculos, la prueba en secuentes es más simple que la prueba en deducción natural, esto no dice gran cosa acerca de cuál de los sistemas ofrece la mejor explicación de nuestras prácticas inferenciales. Muchas veces,

cuando definimos sistemas de prueba, intentamos reducir al mínimo la cantidad de reglas primitivas. Las razones por las que procedemos de esta manera, sin embargo, suelen tener poco que ver con el modelado del razonamiento ordinario. En general, atañen a nuestro deseo de, por un lado, facilitar las pruebas metateóricas, y por otro, brindar una descripción tan económica como sea posible del comportamiento inferencial de las constantes lógicas.<sup>5</sup> En nuestro razonamiento ordinario, por otra parte, usamos un sinnúmero de reglas que no son las primitivas de ninguno de los sistemas de prueba estándar. Si nuestra meta principal es brindar una buena descripción de nuestro razonamiento, ninguna consideración metodológica nos impide enriquecer cualquiera de nuestros sistemas con algunas de sus reglas derivadas. (En particular, nada nos impide enriquecer NK o LK con las reglas relevantes para el ejemplo.) Así, la complejidad de las derivaciones en nuestros sistemas de prueba más simples no debería ser tomada como parámetro de la elegancia *todas las cosas consideradas* de nuestra teoría del razonamiento.

Concluyo, entonces, que la ortodoxia está en lo cierto cuando dice que no hay conclusiones múltiples disyuntivas en el lenguaje natural. Ahora bien, la ortodoxia también dice que no hay conclusiones múltiples en absoluto, y ahí está errada. En la mayoría de los casos, quienes afirman lo anterior *asumen* que las conclusiones múltiples se han de leer de manera disyuntiva.<sup>6</sup> Y tal asunción es, por supuesto, algo que la defensora del enfoque conjuntivo no quiere ni necesita conceder.

### 3.1.2. El enfoque conjuntivo

En español, tiene perfecto sentido emitir fragmentos del siguiente tipo:

- (1) *Estas consecuencias se siguen de tales y cuales compromisos teóricos*
- (2) *Tu teoría implica el siguiente conjunto de enunciados...*
- (3) *Tal y cual hipótesis tiene una serie de consecuencias indeseables...*

---

<sup>5</sup>Para quienes abrazan el *inferencialismo* acerca de las constantes lógicas, describir su comportamiento inferencial equivale a describir su significado.

<sup>6</sup>Hasta donde sé, de todas las personas que sostienen que no hay conclusiones múltiples en el lenguaje natural, sólo Cintula y Paoli (2016) no asumen el enfoque disyuntivo. Discuto el trabajo de estos autores más abajo.

Es claro que, si formalizamos estos fragmentos por medio de argumentos con conclusiones múltiples, las conclusiones en cuestión se han de leer de manera conjuntiva. (Nadie emitiría (1) para expresar que al menos una de las consecuencias enumeradas se sigue. Observaciones análogas aplican a (2) y (3).) Mi intuición en este punto es que formalizar por medio de argumentos con conclusiones múltiples es adecuado. Para quienes comparten mi intuición, enhorabuena: tenemos conclusiones múltiples conjuntivas en el lenguaje natural. Para aplacar a quienes no la comparten, considero algunas objeciones.

La primera sostiene que los ejemplos del tipo anterior se pueden formalizar de manera *al menos* igual de satisfactoria usando de argumentos que tienen una conjunción por única conclusión. Si las conclusiones múltiples no contribuyen a una mejor explicación de la evidencia, ¿para qué postular argumentos con conclusiones múltiples?

Frente a esta objeción, tengo varias respuestas. La primera es que, en ocasiones, formalizar usando conjuntos parece ser más fiel a las intenciones del hablante que formalizar usando conjunciones. La razón es que la identidad de las conjunciones es sensible a la cantidad de ocurrencias de sus conyuntos (“ $A \wedge A \wedge B$ ” es un objeto distinto de “ $A \wedge B$ ”) y al orden en que aparecen (“ $A \wedge B$ ” es un objeto distinto de “ $B \wedge A$ ”). La identidad entre conjuntos no es sensible a ninguno de estos dos factores ( $\{A, A, B\}$ ,  $\{A, B\}$  y  $\{B, A\}$  son el mismo objeto). Y en muchos ejemplos del tipo que ofrecí más arriba, la identidad del argumento a formalizar no parecen sensible a la cantidad de veces o el orden en que las conclusiones ocurren. Por ejemplo, supongamos que precisamos (1) como sigue:<sup>7</sup>

(1\*) *La ausencia de responsabilidad moral, la imposibilidad de autonomía y un deprimente fatalismo histórico se siguen del determinismo duro*

y comparemos el anterior pasaje con el siguiente:

(1\*\*) *La ausencia de responsabilidad moral, un deprimente fatalismo histórico y la imposibilidad de autonomía se siguen del determinismo duro*

En términos intuitivos, ambos pasajes expresan el mismo argumento. Por supuesto, podrían diferir en sus aspectos pragmáticos (quizás, otorgan distinto énfasis a alguna de las

<sup>7</sup>Aclaración: el ejemplo no es representativo de la opinión que el determinismo le merece al autor.

conclusiones). Pero en lo que respecta a su contenido *lógico*, los pasajes son similares, y por ende, requieren la misma formalización. ¿Qué formalización ha de ser esa? No puede ser un argumento con una única conclusión de forma conjuntiva. (¿En qué orden y cuántas veces colocaríamos los conyuntos? Cualquier opción falla en hacerle justicia a alguno de los pasajes.) La alternativa obvia es, entonces, un argumento con una *colección* conjuntiva de conclusiones. Vale la pena notar que mi punto no es demasiado controversial: por las mismas razones que las esbozadas, en los cursos de lógica elemental se suele dar por buenas formalizaciones que sólo difieren en el orden en que recuperan las premisas.

Mi segunda respuesta es que a veces usamos argumentos con infinitas de conclusiones, y en tales casos, es imposible reducir las conclusiones en cuestión a una conjunción ordinaria—esto es, finita. Lo anterior aplica sobre todo a discursos científicos o filosóficos. Por ejemplo, podemos decir cosas como:

(4) *Los axiomas de Peano implican las verdades de la matemática*

(5) *Una teoría de la verdad clásica naïve implica todas las oraciones del lenguaje.*

Nuestra objetora podría responder que en ejemplos de este tipo, la conclusión es una conjunción infinitaria. Pero a mi criterio, consideraciones de economía teórica quitan plausibilidad a la respuesta. Las conclusiones múltiples se expresan usando maquinaria de teoría de conjuntos. Las conjunciones infinitarias también, y además requieren el uso de oraciones infinitas (entidades sintácticas cuya plausibilidad filosófica es al menos sospechosa). Así, a pesar de reducir la cantidad de conclusiones, las conjunciones infinitarias no contribuyen a economizar recursos expresivos en nuestro metalenguaje. Doy un ejemplo. Supongamos que queremos formalizar (5). Sea  $\mathcal{L}$  nuestro lenguaje, y  $\mathbf{T}$  una teoría de la verdad clásica *naïve* formulada en  $\mathcal{L}$ . Si usamos conclusiones múltiples conjuntivas, podemos escribir

$$\mathbf{T} \models \{\phi : \phi \in \mathcal{L}\}$$

Si usamos conclusiones simples, nos vemos obligados a decir

$$\mathbf{T} \models \bigwedge \{\phi : \phi \in \mathcal{L}\}$$

En ambos casos usamos maquinaria conjuntística; luego, el uso de conjunciones infinitarias no contribuyó a nuestra economía de recursos expresivos. Vale mencionar que un punto

similar a este es señalado por Shoensmith y Smiley (1978) en su defensa de las conclusiones múltiples disyuntivas. En este sentido, ambos enfoques se encuentran en pie de igualdad.

Mi tercer y última respuesta a la partidaria de las conclusiones simples conjuntivas es que, si las razones que di para admitir conclusiones múltiples no la convencen, puede que tampoco cuente con razones de peso para admitir argumentos con múltiples premisas. Las premisas múltiples se interpretan siempre de manera conjuntiva—en donde ‘siempre’ significa en toda lógica aplicada al razonamiento ordinario de la que he tenido noticia. Luego, nuestro enfoque somete premisas y conclusiones a la *misma* interpretación. De manera acorde, las razones que respaldan premisas múltiples tienden a respaldar conclusiones múltiples, y *viceversa*. También los conjuntos de premisas múltiples podrían ser formalizados como premisas únicas de forma conjuntiva—quizás, infinitaria. Si la objeto- ra es consecuente, debería optar por tal formalización. Pero dudo que vea esta alternativa con agrado.

Otra objeción a mi tesis surge de posturas como la esbozada por Cintula y Paoli (2016). Los autores asumen una lectura conjuntiva de las conclusiones múltiples. Sin embargo, sostienen que todo argumento en el lenguaje natural tiene una conclusión simple, y que si *parece* tener conclusiones múltiples, es porque en realidad estamos ante una manera abreviada de referirnos a una multiplicidad de argumentos distintos. De manera más precisa: un secunte de conclusiones múltiples  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  no modela un argumento, sino que denota un *conjunto* de secuentes de conclusiones simples,  $\{\Gamma \Rightarrow \delta : \delta \in \Delta\}$ , cada uno de los cuales modela un argumento.

Ahora bien, no encuentro esta propuesta demasiado convincente. Cuando un hablante emite un argumento que *prima facie* tiene  $n$  conclusiones, en general no es consciente de estar realizando una cantidad  $n$  de argumentos distintos, uno por cada conclusión. Yendo a casos más extremos, cuando un hablante emite un argumento con *infinitas* conclusiones, en general no es consciente de estar realizando infinitos argumentos—y no es ni siquiera claro en qué consistiría tener consciencia de tal cosa, si es que es posible dada nuestra naturaleza finita. Luego, la propuesta de Cintula y Paoli se adecúa peor que la nuestra a las intuiciones preteóricas de los hablantes acerca de lo que hacen con sus actos de habla. Por

supuesto, las intuiciones preteóricas son una fuente de evidencia derrotable—un ejemplo paradigmático de esto es la teoría de las descripciones definidas de Russell. Pero para que las intuiciones preteóricas sean derrotadas, necesitamos razones teóricas de peso en favor de la propuesta más contraintuitiva. Y no veo tales razones teóricas en favor de la propuesta de Cintula y Paoli.

Quizás, mi respuesta a Cintula y Paoli puede despertar cierto recelo. Por un lado, sugiero que, cuando un hablante emite un argumento con  $n$  conclusiones, no es aconsejable atribuirle la emisión de  $n$  argumentos distintos, cada uno con una sola conclusión. Por otro lado, sin embargo, esa parece ser la manera en que operan los cálculos que ofrezco en la Sección 1.2. En los mismos, para probar que un conjunto no vacío  $\Delta$  se sigue de otro  $\Gamma$ , en primer lugar, brindamos, para cada  $\delta$  en  $\Delta$ , una prueba de que  $\delta$  se sigue de  $\Gamma$ . Luego, fusionamos todas las pruebas anteriores por medio de una regla de Merge ( $\mathcal{S}$ -M o  $\mathcal{N}$ -M). De este modo, una prueba con  $n$  conclusiones contiene siempre  $n$  pruebas distintas, cada una con una sola conclusión. Si mi réplica a Cintula y Paoli es correcta, parece socavar la justificación filosófica de mis cálculos: los mismos no modelarían de manera adecuada el razonamiento de los hablantes.

Mi respuesta es doble. En primer lugar, creo que no debemos confundir las nociones de ‘argumento’ y ‘prueba’. Los argumentos solo contienen premisas y conclusiones. Las pruebas contienen premisas, conclusiones, y además, las movidas inferenciales en virtud de las cuales, se supone, las conclusiones reciben apoyo de las premisas. Cuando un hablante emite un argumento, afirma que algo *se sigue* de otra cosa. Cuando brinda una prueba, en cambio, *justifica* la anterior afirmación. Mi punto es que argumentos y pruebas podrían relacionarse con las conclusiones múltiples de manera diferente. Bien podría pasar que a veces usamos argumentos de conclusiones múltiples, pero las pruebas de tales argumentos involucran múltiples pruebas de una sola conclusión. Eso no sería un problema. Una cosa es qué se sigue de qué, y otra es cómo mostramos que algo se sigue.

En segundo lugar, incluso si obviamos la distinción entre argumentos y pruebas, creo que la justificación filosófica de mis cálculos está fuera de peligro. Es cierto que los mismos sólo cuentan con dos reglas para regular el comportamiento de las conclusiones múltiples.

Sin embargo, y como sugerí antes (Sec. 3.1.2), cuando formulamos sistemas de prueba, en general intentamos reducir al mínimo el número de reglas primitivas, y la razón tiene poco que ver con el razonamiento cotidiano. En el caso que nos concierne, tener pocas reglas de conclusiones múltiples tiene al menos dos ventajas. Por un lado, facilita las pruebas metateóricas. Por otro lado, desde un punto de vista inferencialista, podríamos pensar que las reglas  $\mathcal{S}$ -M y RaW (en secuentes) o  $\mathcal{N}$ -M y aW (en deducción natural) establecen las condiciones para la introducción y la eliminación de la coma metateórica, y de esta manera, describen el *significado* de esta expresión. En cualquier caso, nada nos impide formular otros sistemas, en donde haya más reglas primitivas de conclusiones múltiples.

*Conclusión.* Tenemos buenas razones para admitir que hay conclusiones múltiples conjuntivas en el lenguaje natural, pero no así para admitir que hay conclusiones múltiples disyuntivas. Todo indica, entonces, que el enfoque disyuntivo postula entidades que no existen en el lenguaje natural, y lo mismo no ocurre con el enfoque conjuntivo. En la medida usemos la lógica para modelar el razonamiento ordinario, lo anterior constituye un argumento en favor del enfoque conjuntivo con su lógica **CCL**, y en contra del enfoque disyuntivo, con su sistema **MCL**.

## 3.2. Intuiciones sobre (Meta)Validez

Hay cierto acuerdo en que, en los estudios acerca de la validez en general, y acerca del razonamiento ordinario en particular, una de las fuentes de evidencia con que cuenta la lógica está dada por las intuiciones preteóricas de las hablantes. A veces, esta idea es defendida de manera explícita, apelando a consideraciones metodológicas; Priest (2016, p. 9), por ejemplo, escribe:<sup>8</sup>

In the criterion of adequacy to the data, what counts as data? It is clear enough what provides the data in the case of an empirical science: observation and experiment. What plays this role in logic? The answer, I take it, is our intuitions about the validity or otherwise of vernacular inferences.

---

<sup>8</sup>Para más autores en esta línea, véanse v.g. Hjortland (2017), Kripke (2021), Martin y Hjortland (2021) y Russell (2015))

Otras veces, es defendida de manera implícita, como cuando McGee (1985) y Kolodny y MacFarlane (2010) apelan a las intuiciones de las hablantes para sostener la invalidez del *Modus Ponens* y el *Modus Tollens*, respectivamente. Desde ya, nuestras intuiciones son *fallibles*: tenemos una capacidad computacional limitada, consideramos solo casos particulares, somos susceptibles de sesgos (v.g. Evans, 2005; Hjortland, 2019). Aún así, constituyen una de las importantes fuentes de evidencia que se admiten en la disciplina, y su relevancia se acentúa cuando, como en este Capítulo, lo que nos interesa es la aplicación de la lógica al razonamiento ordinario.

En esta sección, entonces, comparamos los enfoques conjuntivo y disyuntivo a las conclusiones múltiples en lo que respecta a su adecuación a nuestras intuiciones preteóricas. Voy a sostener, en particular, que la lógica **CCL** modela tales intuiciones mejor que **MCL**. Entre otras cosas, **MCL** declara inválidos ciertos esquemas metainferenciales que nos parecen válidos. La explicación de por qué esto ocurre es que, en **MCL**, la equivalencia lógica falla en ser una genuina relación de equivalencia.

En general, quienes hacemos filosofía de la lógica tenemos pocas intuiciones que sean *preteóricas* en sentido genuino. El conocimiento acumulado durante nuestra formación moldea nuestras creencias acerca de la validez y reacciones frente a argumentos concretos. La lógica clásica es el sistema predominante—tanto en filosofía, como en ciencia y computación—y estamos, por así decirlo, ‘adoctrinados’ para no protestar ante los rasgos sorprendentes que pueda tener. Ahora bien, intentemos, por un momento, hacer *tabula rasa* de ciertos aspectos específicos de nuestra formación, a saber, los que tienen que ver con el ‘adecuado’ comportamiento de las conclusiones múltiples. Creo que, si hacemos esto, encontramos que **MCL** tiene algunas consecuencias bastante contraintuitivas.

*Ejemplo 1:*  $\{A, B\}$  es lógicamente equivalente a  $\{A \vee B\}$ , ¡pero también a  $\{A \wedge B\}$ ! ¿Cómo puede un mismo conjunto ser lógicamente equivalente a dos oraciones que tienen distintas condiciones de verdad—o, dicho de manera más precisa, a dos conjuntos que no tienen los mismos modelos?<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Vale mencionar que, dado que  $A$  y  $B$  son arbitrarias, como caso particular tenemos que  $\{A, \neg A\}$  es lógicamente equivalente tanto a  $\{A \wedge \neg A\}$  como a  $\{A \vee \neg A\}$ , es decir, tanto a un conjunto sin modelos como a uno sin contramodelos.

*Ejemplo 2:* El conjunto vacío,  $\emptyset$ , es lógicamente equivalente a  $\{A, \neg A\}$ , ¡pero no a sí mismo! Si un conjunto implica a otro inconsistente (i.e. sin modelos), ¿por qué no implica cualquier cosa, y en particular, por qué no se autoimplica?

Las anteriores preguntas, por supuesto, tienen respuestas técnicas precisas. Sin embargo, esas respuestas *presuponen* el enfoque disyuntivo a las conclusiones múltiples. En el Ejemplo 1, los conjuntos  $\{A, B\}$  y  $\{A \vee B\}$  son lógicamente equivalentes porque, si bien no se da que todo modelo de  $\{A \vee B\}$  es un modelo de  $\{A, B\}$ , sí se da que todo modelo de  $\{A \vee B\}$  hace verdadera *alguna* oración en  $\{A, B\}$ —y esto es todo lo que el enfoque disyuntivo pide para tener validez. En el Ejemplo 2,  $\emptyset$  no es lógicamente equivalente a sí mismo porque, si bien todo modelo hacer verdaderas a todas sus oraciones—a saber, ninguna—ningún modelo hace verdadera a al menos una de ellas. Responder a los contraejemplos intuitivos *asumiendo* que las conclusiones múltiples se leen de manera disyuntiva constituye, claro está, una petición de principios en favor del enfoque disyuntivo. Lo que investigamos es, *dadas* nuestras intuiciones preteóricas como hablantes y, quizás, nuestros conocimientos adquiridos acerca de la consecuencia lógica de conclusiones simples, cuál es el comportamiento intuitivo de la consecuencia lógica de conclusiones múltiples. Y a mi juicio, **MCL** se comporta de manera bien distinta a cómo hubiésemos esperado.

Como quizás la lectora ya advirtió, los ejemplos que di más arriba presuponen la siguiente noción de equivalencia lógica:

**Definición 67.** Dos conjuntos de oraciones son lógicamente equivalentes si y sólo si se implican lógicamente uno al otro.

La definición parece más que plausible, dado que generaliza a conclusiones múltiples la noción estándar de equivalencia lógica entre oraciones, que también se suele entender en términos de implicación mutua:  $A$  y  $B$  son lógicamente equivalentes si y sólo si  $A$  implica  $B$  y  $B$  implica  $A$ . Sin embargo, quizás un defensor del enfoque disyuntivo podría protestar en este punto. Su alegato sería más o menos el que sigue. En conclusiones simples, las relaciones de ‘tener los mismos modelos’ e ‘implicarse mutuamente’ son coextensivas o

‘vienen juntas’, para decirlo en palabras coloquiales. Así, la definición de equivalencia lógica puede formularse en términos tanto de mismidad de modelos como de implicación mutua, y arroja los mismos resultados en ambos casos. Pero en conclusiones múltiples—continúa la objeción—las relaciones mencionadas se separan: si bien para cualquier par de conjuntos se da que, si tienen los mismos modelos, se implican el uno al otro, no se da que, para cualquier para de conjuntos, si se implican uno al otro, entonces tienen los mismos modelos. Luego, la noción de equivalencia lógica no puede ajustarse a ambas relaciones a la vez. Debemos elegir. Y acabamos de ver que la Definición 67, basada en la implicación mutua, genera problemas. Entonces, optemos por su alternativa,

**Definición 68.** Dos conjuntos de oraciones son lógicamente equivalentes si y sólo si tienen los mismos modelos.

y disolvemos los contraejemplos. Ahora, ni  $\{A, B\}$  y  $\{A \vee B\}$ , ni  $\emptyset$  y  $\{A, \neg A\}$ , son lógicamente equivalentes; además  $\emptyset$  es equivalente consigo mismo. (¡Hurra!)

Sin embargo, no considero que la respuesta sea convincente. La razón es simple: según el enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples, las relaciones de ‘tener los mismos modelos’ e ‘implicarse mutuamente’ son coextensivas *tanto* en conclusiones simples, *como* en conclusiones múltiples; además, el enfoque carece de los contraejemplos intuitivos que aquejan su rival. Entonces, ¿por qué pagar el costo que el enfoque disyuntivo nos supone? ¿Por qué romper la simetría entre las nociones de equivalencia lógica en conclusiones simples y conclusiones múltiples, si no es necesario para salvar la evidencia? No veo respuestas adecuadas en favor del enfoque disyuntivo.

Ahora bien, ¿hay algo en común entre el Ejemplo 1 y el 2? En particular, ¿hay alguna propiedad de **MCL** que los explique a ambos? Sugiero que la respuesta es afirmativa. Los dos ejemplos atestiguan que **MCL** invalida el siguiente principio:

$$\text{Ax-1} \frac{\Gamma \Leftrightarrow \Sigma \quad \Delta \Leftrightarrow \Sigma}{\Gamma \Leftrightarrow \Delta}$$

En términos informales, puede leerse: “Si dos cosas son lógicamente equivalentes a una tercera, entonces son lógicamente equivalentes entre sí”. La etiqueta ‘Ax-1’ hace referencia a la clara similitud con el Axioma 1 de Euclides.<sup>10</sup> En el Ejemplo 1,  $\Gamma$  es  $\{A \vee B\}$ ,  $\Delta$

<sup>10</sup>A saber: “Si dos cosas son iguales a una tercera, son iguales entre sí”.

es  $\{A \wedge B\}$ , y  $\Sigma$  es  $\{A, B\}$ . En el Ejemplo 2,  $\Gamma$  y  $\Delta$  son ambos  $\emptyset$ , y  $\Sigma$  es  $\{A, \neg A\}$ . En ambos casos, tenemos contraejemplos a la validez global de  $Ax-1$  en la lógica **MCL**.

Considero que  $Ax-1$  expresa una propiedad intuitiva de la relación de consecuencia, cualesquiera sean sus *relata*, es decir, tanto si trabajamos en conclusiones simples como en conclusiones múltiples, tanto si lo hacemos con oraciones como con proposiciones, entre otras alternativas. Es cierto que la lectora podría no compartir ninguna de mis intuiciones, esto es, pensar que ni el Ejemplo 1, ni el 2, ni la invalidez de  $Ax-1$  suponen evidencia intuitiva en contra de **MCL**. Si ese es el caso, no tengo mucho más para decir—en donde comienza el disenso de intuiciones, termina mi evidencia. Sin embargo, vale la pena notar que  $Ax-1$  permite echar luz sobre un importante aspecto en que la lógica clásica de conclusiones simples, **CL** se parece a **CCL** pero no a **MCL**.

Tanto en **CL** como en **CCL**, la relación de equivalencia *lógica* es una genuina relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva. Esto no ocurre, sin embargo, en **MCL**: primero, el conjunto vacío  $\emptyset$  es no equivalente a sí mismo, lo que constituye un fallo de reflexividad; segundo, si bien  $\{A \vee B\}$  es equivalente a  $\{A, B\}$ , y  $\{A, B\}$  es equivalente a  $\{A \wedge B\}$ ,  $\{A \vee B\}$  no es equivalente a  $\{A \wedge B\}$ , lo que constituye un fallo de transitividad. Ahora bien, tanto **CL** como **CCL** validan  $Ax-1$ ; de hecho, *toda* lógica en donde la equivalencia lógica sea una relación de equivalencia valida este principio.

Se suele decir que la lógica clásica es reflexiva, monótona y transitiva. Sabemos que la consecuencia lógica clásica de conclusiones simples,  $\models_{\text{CL}}$ , por definición no es el tipo de cosa que puede tener estas propiedades, dado que su dominio y codominio no coinciden. Las relaciones  $\models_{\text{CCL}}$  y  $\models_{\text{MCL}}$  son ambas generalizaciones de  $\models_{\text{CL}}$ , en el sentido preciso de que esta última es una restricción de las anteriores; además, **CCL** y **MCL** tienen dominios y codominios idénticos, por lo que *sí* son el tipo de cosa que puede satisfacer reflexividad y transitividad. Ahora bien, **CCL** es reflexiva y transitiva, mientras que **MCL** no lo es. ¿Constituye esto una razón para pensar que **CCL** es ‘más clásica’, o quizás ‘más parecida a la lógica clásica de conclusiones simples’ que **MCL**? Hasta el momento, había guardado silencio sobre la cuestión. Ahora, sugiero una respuesta positiva. La razón es

que el principio Ax-1, que caracteriza a los sistemas **CL** y **CCL**, captura una cierta cuota de reflexividad y de transitividad.

**Hecho 39.** Sea  $\Rightarrow$  una relación diádica cualquiera, y sea  $\Leftrightarrow$  la relación  $\{\langle x, y \rangle : x \Rightarrow y \ \& \ y \Rightarrow x\}$ . Si  $\Leftrightarrow$  valida Ax-1 y es serial,  $\Rightarrow$  es reflexiva.<sup>11</sup>

*Demostración.* Supongamos que  $\Leftrightarrow$  valida Ax-1. Sea  $x$  cualquier elemento en el dominio de  $\Rightarrow$ . Por serialidad, sabemos que hay un  $y$  tal que  $x \Leftrightarrow y$ . Luego, en Ax-1 reemplazamos  $\Gamma$  y  $\Delta$  por  $x$  y  $\Sigma$  por  $y$ , y obtenemos  $x \Leftrightarrow x$ .  $\square$

**Hecho 40.** Sean  $\Rightarrow$  y  $\Leftrightarrow$  como en el Hecho 39. Si  $\Leftrightarrow$  satisface Ax-1 y es conmutativa, entonces  $\Rightarrow$  satisface el siguiente principio de transitividad restringido:

$$\text{weak-Tr} \frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma \quad \Sigma \Rightarrow \Delta \quad \Sigma \Rightarrow \Gamma \quad \Delta \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

*Demostración.* Si  $\Leftrightarrow$  es conmutativa, basta con conmutar  $\Sigma$  y  $\Delta$  en la segunda premisa de Ax-1 para obtener la regla

$$\frac{\Gamma \Leftrightarrow \Sigma \quad \Sigma \Leftrightarrow \Delta}{\Gamma \Leftrightarrow \Delta}$$

que implica weak-Tr por la definición de  $\Leftrightarrow$ .  $\square$

En otras palabras, toda lógica que sea similar a **CL** en el sentido de que su relación de equivalencia lógica es una relación de equivalencia, y además cumple con dos condiciones mínimas como son la serialidad y conmutatividad de la equivalencia lógica, satisface reflexividad y cierta versión restringida de transitividad que denominamos weak-Tr—principios ambos violados por **MCL**. En este sentido, la reflexividad y transitividad de **CCL** hablan de una similitud adicional que este sistema tiene con la lógica clásica de conclusiones simples, por oposición a la que tiene la generalización basada en el enfoque disyuntivo.

A modo de cierre. En el debate actual en torno a las metainferencias, encontramos de vez en cuando la queja de que las metainferencias no juegan ningún papel—o quizás,

<sup>11</sup>En términos informales, una relación es *serial* si y sólo si todo elemento en su dominio se relaciona con al menos un elemento en su codominio.

sólo juegan un papel muy secundario—en el razonamiento cotidiano.<sup>12</sup> Vale la pena notar, sin embargo, que los ejemplos intuitivos que presenté en esta sección tienen todos por objeto no la validez de ciertas inferencias, sino la de ciertas metainferencias—o en términos más precisos, esquemas metainferenciales. En el Ejemplo 1, nos sorprende que en **MCL** sean al mismo tiempo válidos los esquemas inferenciales  $\{A, B\} \Leftrightarrow \{A \vee B\}$  y  $\{A, B\} \Leftrightarrow \{A \wedge B\}$ , pero no así el esquema  $\{A \vee B\} \Leftrightarrow \{A \wedge B\}$ ; es decir, nos choca la invalidez global del esquema metainferencial

$$\frac{\{A, B\} \Leftrightarrow \{A \vee B\} \quad \{A, B\} \Leftrightarrow \{A \wedge B\}}{\{A \vee B\} \Leftrightarrow \{A \wedge B\}}$$

De manera análoga, en el Ejemplo 2 nos choca la invalidez global de

$$\frac{\emptyset \Leftrightarrow \{A, \neg A\}}{\emptyset \Leftrightarrow \emptyset}$$

Como ya mencioné, ambos son casos particulares del principio estructural más general Ax-1. Por ende, considero que el tipo de evidencia intuitiva que presentamos en esta sección respalda, contra la queja mencionada, la idea de que las metainferencias son relevantes para el razonamiento cotidiano.

<sup>12</sup>Esta idea suele aparecer en debates hablados. Hasta donde sé, todavía no ha sido volcada de manera explícita por escrito. Lo más parecido que encontré por escrito es el descargo de Ripley (2021); el autor sostiene que las razones que se suelen dar en favor de preservar lo más posible la lógica clásica (v.g. la ‘máxima de la mutilación mínima’ de Quine, 1986) sólo justifican la preservación de las *inferencias* válidas en esta lógica, y poco tienen que ver con sus metainferencias.

## 4. Ambigüedad Metateórica

---

*Pluralitas non est ponenda sine necessitate*

Guillermo de Ockham

En el Capítulo 3 sostuve que el enfoque conjuntivo a las conclusiones múltiples es superior al enfoque disyuntivo a la hora de modelar el razonamiento ordinario. Hasta ahora, entonces, la motivación filosófica que propuse para el enfoque conjuntivo estuvo circunscrita a una aplicación particular de la lógica—todo lo que dije es compatible con que el enfoque disyuntivo sea mejor que el conjuntivo para otros fines que *no sean* modelar el razonamiento. En este Capítulo, esbozo una defensa del enfoque conjuntivo que no depende de ninguna aplicación en particular. Sostengo que hay una virtud teórica que el enfoque conjuntivo tiene y de la que el disyuntivo carece; se trata de la univocidad de los términos metateóricos. De manera dual, podemos decir que hay un vicio que aqueja al enfoque disyuntivo pero no al conjuntivo, a saber, la ambigüedad. Voy a centrar mi argumentación en el sistema **MCL**, que captura la aplicación del enfoque disyuntivo a la lógica clásica. Sin embargo, la mayoría de mis argumentos—sino todos—se trasladan sin mayores dificultades a las lógicas no clásicas más comunes.

La idea intuitiva de por qué el sistema **MCL** tiene una metateoría ambigua es bastante simple. En cualquier enunciado de la forma  $A_1, \dots, A_m \models_{\mathbf{MCL}} B_1, \dots, B_n$ , la lectura informal por defecto de la coma ‘,’ es conjuntiva o universal a la izquierda del martillo de implicación, y disyuntiva o existencial a la derecha; la razón es que, en caso de que el enunciado sea verdadero, el hecho de que *todas* las  $A_i$  tengan el valor semántico ‘1’ garantiza que *alguna*  $B_i$  tenga el valor ‘1’ también. Así, la coma no es una expresión del metalenguaje con una lectura única: su significado varía de acuerdo al lugar que ocupa en el enunciado del cual forma parte.

Frente a lo anterior, alguien podría plantear un par de objeciones. La primera sostiene que estamos ante un tipo *no problemático* de ambigüedad. La ambigüedad es problemática sólo cuando genera confusiones, y las confusiones tienen lugar sólo cuando carecemos de criterios para determinar qué significa una expresión en cada ocasión de uso. Pero la metateoría de **MCL** nos proporciona tales criterios: sabemos que siempre que la coma está a la izquierda del martillo, se lee de manera conjuntiva, y siempre que está a la derecha, de manera disyuntiva. Eso es todo lo que necesitamos saber para que las confusiones no ocurran. Así, la ambigüedad metateórica de **MCL** es inocua.

La segunda objeción va más lejos, y sostiene que, de hecho, la ambigüedad de **MCL** es *eliminable*. Si queremos que los términos del metalenguaje sean unívocos, basta con, por ejemplo, reemplazar todas las apariciones de la coma a la derecha del martillo por algún símbolo distinto, como podría ser el punto y coma ‘;’. En el metalenguaje resultante, todos los términos se asocian con una única lectura: la coma se entiende de manera conjuntiva, y el punto y coma de manera disyuntiva. Así, la aparente ambigüedad no era más que una convención notacional.

El Capítulo está estructurado como sigue. En la Sección 4.1, respondo a la segunda objeción; sostengo que la ambigüedad metateórica de **MCL** es no eliminable. En la Sección 4.2, respondo a la primera; sostengo que, si bien la ambigüedad metateórica de **MCL** no genera confusiones, es problemática en el sentido de indeseable. Por último, en la Sección 4.3 hago una analogía entre la célebre y malquerida conectiva **TONK** y el comportamiento de la coma metateórica en **MCL**; sugiero que, quienes consideren que **TONK** es una expresión ilegítima, tienen buenas razones para pensar que la coma en **MCL** es ilegítima también.

## 4.1. La metateoría de MCL es ambigua

Supongamos que tomamos la metateoría de **MCL** y reemplazamos todas las comas a la derecha del martillo de implicación por un punto y coma. Es apresurado concluir que la metateoría resultante es no ambigua. La razón es que la relación  $\models_{\mathbf{MCL}}$  tiene por relata

*conjuntos*. Así, en un enunciado del tipo

$$(3) \quad A_1, \dots, A_n \models_{\text{MCL}} A_1; \dots; A_n$$

las expresiones  $A_1, \dots, A_n$  y  $A_1; \dots; A_n$  son de hecho sinónimas: constituyen dos maneras alternativas de denotar por extensión uno y el mismo conjunto, a saber, el de las  $A_i$  tales que  $1 \leq i \leq n$ . Podemos denotar este conjunto por compresión, escribiendo  $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ , y reformular (3) como

$$(4) \quad \{A_i : 1 \leq i \leq n\} \models_{\text{MCL}} \{A_i : 1 \leq i \leq n\}$$

La pregunta es, ahora, si enunciados como (4) reciben todos una lectura unívoca en **MCL**. La respuesta dependerá, en parte, de qué signifique el martillo de implicación. Por ejemplo, imaginemos que el martillo admite la siguiente definición

$$x \models_{\text{MCL}} y \text{ si y sólo si } x \text{ e } y \text{ son conjuntos}$$

en donde “si y sólo si” denota al bicondicional material y “ser un conjunto” se predica en el mismo sentido de  $x$  y de  $y$ . Entonces, (4) sería no ambiguo. Sin embargo, es claro que  $\models_{\text{MCL}}$  no admite la anterior definición, por el sencillo hecho de que es no trivial.

En esta Sección, considero dos definiciones informales de la relación  $\models_{\text{MCL}}$  que considero plausibles; la primera entiende la validez en términos de preservación de verdad, y la segunda en términos de inclusión de contenido. Argumento que ninguna evita la ambigüedad en la metateoría de **MCL**.

#### 4.1.1. Validez como preservación de verdad

Hoy en día, el modo más común de entender la validez es en términos de preservación de verdad formal y necesaria.<sup>1</sup> En este apartado analizo, entonces, si la metateoría de **MCL** es ambigua cuando interpretamos la validez de ese modo.

<sup>1</sup>Véanse, por ejemplo, Beall et al. (2019, p. 9), Priest (2017, p. 4), Shapiro y Kouri Kissel (2021, p. 33), Wolfram (2014).

En un contexto de premisas múltiples y conclusiones simples, una definición plausible de validez en términos de preservación de verdad corre como sigue:

( $\text{TrP}_{\text{SET-FMLA}}$ ) El argumento que va de  $\Gamma$  a  $A$  es válido si y sólo si, siempre que todas las oraciones en  $\Gamma$  son verdaderas,  $A$  es verdadera también.

en donde usamos la expresión ‘siempre’ como en la Introducción (es decir, garantizando tanto necesidad como formalidad). Ahora bien, la relación  $\models_{\text{MCL}}$  tiene tanto premisas como conclusiones *múltiples*. Además, existen relaciones de consecuencia con conclusiones múltiples pero premisas simples, y también con conclusiones y premisas simples. ¿Cómo damos una definición general de validez en términos de preservación de verdad? Supongamos que  $\models \subseteq X \times Y$  es una relación de consecuencia lógica, y no asumamos nada acerca de  $X$  e  $Y$  (es decir, no sabemos si contienen oraciones o colecciones de algún tipo). Una respuesta razonable es que  $\models$  preserve verdad siempre y cuando satisfaga la siguiente condición, para todo  $x \in X$  e  $y \in Y$ :

( $\text{TrP}$ ) El argumento que va de  $x$  a  $y$  es válido, i.e.  $x \models y$ , si y sólo si, siempre que  $x$  es verdadero,  $y$  es verdadero también.

Es decir, la preservación de verdad tiene los mismos *relata* que la relación de consecuencia. La definición ( $\text{TrP}_{\text{SET-FMLA}}$ ) es un caso de ( $\text{TrP}$ ), si por convención asumimos que, cuando las oraciones de un conjunto son todas verdaderas, el conjunto mismo es verdadero. Por otro lado, La aplicación de la definición ( $\text{TrP}$ ) a relaciones de consecuencia con premisas y conclusiones múltiples devuelve lo siguiente:

( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ) El argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  es válido si y sólo si, siempre que  $\Gamma$  es verdadero,  $\Delta$  es verdadero también.

Esto es, un argumento que va de conjuntos a conjuntos es válido si y sólo si preserva verdad desde el conjunto de premisas al conjunto de conclusiones.

Ahora, sea  $\models$  cualquier relación de consecuencia de premisas y conclusiones múltiples que satisface la definición ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ). Supongamos que en la definición en cuestión, las expresiones se leen todas de manera no ambigua; en particular, “es verdadero” significa

lo mismo cuando se aplica a  $\Gamma$  y cuando se aplica a  $\Delta$ . ¿En qué sentidos un conjunto de oraciones  $\Gamma$  puede ser verdadero? Saltan a la vista los dos siguientes:

- ( $\forall$ ) Todas las oraciones en  $\Gamma$  son verdaderas
- ( $\exists$ ) Al menos una oración en  $\Gamma$  es verdadera

Es fácil comprobar que, tanto si leemos la expresión “es verdadero” en el sentido ( $\forall$ ), como si la leemos en el sentido ( $\exists$ ), la definición ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ) implica que  $\models$  es reflexiva y transitiva. Si leemos “es verdadero” en el sentido ( $\forall$ ), tenemos una lectura conjuntiva o universal tanto de las premisas como de las conclusiones, y  $\models$  se emparenta, en este respecto, con **CCL**. Si en cambio leemos “es verdadero” en el sentido ( $\exists$ ), tenemos una lectura disyuntiva o existencial, y  $\models$  se emparenta con el sistema que hemos denominado **CL<sup>VV</sup>** (cf. Sección 2.2). La relación  $\models_{\text{MCL}}$  no es ni reflexiva ni transitiva, por lo que sabemos que no satisface ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ) ni en el sentido ( $\forall$ ) ni en el ( $\exists$ ).

¿Acaso  $\models_{\text{MCL}}$  satisface ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ) en *algún* sentido? La respuesta es negativa. La razón es que, cualquiera sea el sentido en que decimos que un conjunto de oraciones es verdadero, una lectura no ambigua de ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ) implica reflexividad y transitividad. Comprobar esto es sencillo. Consideremos cualquier definición de la forma

- (\*) Un conjunto de oraciones  $\Gamma$  es verdadero si y sólo si \_\_\_\_\_

Asumamos que nuestra relación  $\models$  satisface ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ) bajo la lectura (\*). Primero, si (\*) está bien definida, es imposible que la condición \_\_\_\_\_ se cumpla y no se cumpla al mismo tiempo para un conjunto  $\Gamma$ . Así, cualquier conjunto  $\Gamma$  se implica a sí mismo, y  $\models$  es reflexiva. Segundo, supongamos que  $\Gamma \models \Delta$ ,  $\Delta \models \Sigma$ , y además, la condición \_\_\_\_\_ se cumple para  $\Gamma$ . Por dos aplicaciones de la definición ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ), sabemos que \_\_\_\_\_ también se cumple para  $\Sigma$ . Así,  $\models$  es transitiva.

El principio ( $\text{TrP}_{\text{SET-SET}}$ ) constituye una caracterización plausible de la preservación de verdad con premisas y conclusiones múltiples. Dada esta caracterización, la lógica **MCL** no logra preservar verdad de manera no ambigua.

Una posible objeción frente a la anterior línea de razonamiento consiste en señalar que los conjuntos, en sentido estricto, no son el tipo de cosa que puede ser verdadera o falsa.

Las cosas verdaderas o falsas son oraciones, o quizás proposiciones, pero en cualquier caso no conjuntos. El argumento para mostrar la ambigüedad de **MCL**, ¿puede dar cuenta este hecho? Mi respuesta es afirmativa. Si los conjuntos no son el tipo de cosa que puede ser verdadera o falsa, entonces la validez no ha de explicarse como preservación de verdad entre conjuntos, sino como preservación de alguna otra propiedad que los conjuntos puedan tener; una tal propiedad es, por ejemplo, la satisfacción. Ahora bien, mi argumento no apeló a atributos específicos de la noción de ‘verdad’, es decir, en ningún momento asumí nada acerca de, por ejemplo, el comportamiento inferencial o la explicación metafísica de esta noción. Luego, el argumento pueden reinstanciarse para mostrar que **MCL** es ambigua cuando el estándar de validez es la preservación de satisfacción. Más en general, aplica a cualquier interpretación de la validez como preservación de *alguna* propiedad. En ese sentido, el análisis realizado en esta sección es bastante general.

Otra posible objeción es la siguiente. La definición (TrP) en general, y su instancia (TrP<sub>SET-SET</sub>) en particular, son no razonables, dado que introducen en la noción de preservación de verdad una complejidad innecesaria. El hecho de que la lógica **MCL** sea preservadora de verdad significa nada más, y nada menos, que un argumento es válido en **MCL** si y sólo si, siempre que *todas* sus premisas son verdaderas, *alguna* de sus conclusiones es verdadera—la noción de preservación de verdad no requiere ulterior análisis. En esta lectura, la metateoría de **MCL** preserva verdad y es no ambigua: los nombres de conjuntos siempre tienen la denotación pretendida, y la predicación ‘es verdadero’ se aplica siempre en el mismo sentido (dado que, nótese, sólo se aplica a oraciones).

Mi respuesta es doble. En primer lugar, considero que no es cierto que la noción de ‘preservación de verdad’ no amerite ulterior análisis. Existen muchas lógicas que, en sentido intuitivo, preservan verdad; sólo por mencionar algunas, tenemos la lógica clásica tradicional, es decir de premisas múltiples conjuntivas y conclusiones simples (**CL**), la lógica clásica de premisas y conclusiones simples ( $\tau 1$ ), la de premisas y conclusiones múltiples disyuntivas (**CL**<sup>VV</sup>), y la de premisas y conclusiones múltiples conjuntivas (**CCL**). Todos estos sistemas preservan verdad en un mismo sentido, y la definición (TrP) nos permite dar cuenta de eso. Si adoptamos el enfoque sugerido por la objeción, sin

embargo, deberíamos asumir, para cada sistema, una definición de preservación de verdad distinta que se adapte *ad hoc* al comportamiento estructural que el sistema ostenta. Así, dejaríamos sin iluminar la noción de preservación que se mantiene uniforme en todos.

En segundo lugar, si el hecho de que **MCL** preserve verdad significa nada más y nada menos que lo que la objeción sugiere, entonces no entiendo por qué hablamos de preservación de verdad en primer lugar. En términos intuitivos, la noción de ‘preservación de verdad’ sugiere que hay dos entidades tales que la primera le ‘transmite’ su verdad a la segunda, o también, la segunda ‘hereda’ la verdad presente en la primera. Ahora bien, ¿cuáles serían esas entidades en el caso de **MCL**? Argumenté que, si usamos nuestros términos metateóricos de manera no ambigua, no pueden ser conjuntos, porque no es cierto que, dado un argumento cualquiera válido en **MCL**, siempre que el conjunto de premisas es verdadero, el de conclusiones es verdadero en el mismo sentido. Tampoco puede ser que la verdad se transmita desde el conjunto de premisas hacia *alguna* de las conclusiones, porque por ejemplo, el argumento que va de  $\emptyset$  a  $\{p, \neg p\}$  es válido en **MCL**, y si bien las premisas son siempre verdaderas, no hay ninguna conclusión en particular que siempre lo sea. Por último, quizás cada conjunto funciona como una abreviatura de una oración; en tal caso, las entidades cuya verdad se preserva son oraciones. Pero esta respuesta conduce a una victoria pírrica para el enfoque disyuntivo, dado que renuncia a la idea de que hay argumentos con premisas o conclusiones *múltiples*—todos los argumentos tendrían una única premisa, y una única conclusión (además, la respuesta tiene otros inconvenientes que analizaremos en la Sección 4.2).

Concluyo, entonces, que si entendemos la validez en **MCL** en términos de preservación de verdad—o para el caso, de preservación de alguna propiedad—la metateoría del sistema es ambigua.

#### 4.1.2. Validez como inclusión de contenido

A lo largo de la historia, otra explicación recurrente de la noción de validez sostiene que un argumento es válido si y sólo si el contenido de su conclusión está incluido en el

de sus premisas.<sup>2</sup> En el contexto de la lógica clásica, dos representantes de este enfoque fueron Carnap (1937/2014) y Popper (1935/2002). Ambos autores definen el *contenido lógico* de una oración cualquiera por medio de la colección de sus consecuencias clásicas. Popper, por ejemplo (p. 103), escribe

The *logical content* [of a given statement] is defined, with the help of the concept of derivability, as the class of all non-tautological statements which are derivable from the statement in question.

Es decir, para cualesquiera oraciones  $A$  y  $B$ , si  $A$  implica  $B$  en lógica clásica y  $B$  es no tautológica, entonces  $B$  es *parte* del contenido de  $A$ . Popper incluye el proviso de que la no-tautologicidad para evitar que las tautologías sean parte del contenido de oraciones contingentes. Para simplificar la discusión—y porque no hace ninguna diferencia sustancial a los propósitos que nos conciernen—omitiré ese proviso. En este apartado, analizo en líneas generales, si la metateoría **MCL** es ambigua cuando entendemos la validez como inclusión de contenido.

En general, el enfoque se plantea para un contexto de premisas múltiples y conclusiones simples. Así, tenemos la definición estándar

(CI<sub>SET-FMLA</sub>) El argumento que va de  $\Gamma$  a  $A$  es válido si y sólo si el contenido de  $A$  está incluido en el de  $\Gamma$ .

Otra vez, la relación  $\models_{\text{MCL}}$  tiene conclusiones *múltiples*; además, existen relaciones de consecuencia con premisas simples. ¿Cómo damos una definición general? Supongamos que  $\models \subseteq X \times Y$  es una relación de consecuencia lógica, y otra vez, no asumamos nada acerca de  $X$  e  $Y$ . La siguiente respuesta es, a mi juicio, la más razonable:

(CI)  $x \models y$  si y sólo si el contenido de  $y$  está incluido en el de  $x$

La definición (CI<sub>SET-FMLA</sub>) es, claro está, un caso de (CI). La aplicación de (CI) a premisas y conclusiones múltiples devuelve

---

<sup>2</sup>Para un breve resumen de la historia de este enfoque—que se remonta hasta Aristóteles y pasa por Sexto Empírico y Kant—véase Ferguson (2017, Cap. 1). Para una explicación del surgimiento de las lógicas de inclusión de contenido contemporáneas—que se da en el marco de las respuestas relevantes a las paradojas del condicional material—véase Szmuc (2019, Cap. 1)

( $CI_{\text{SET-SET}}$ ) El argumento que va de  $\Gamma$  a  $\Delta$  es válido si y sólo si el contenido de  $\Delta$  está incluido en el de  $\Gamma$ .

En lo que sigue, doy dos argumentos independientes para pensar que, si la validez en **MCL** es interpretada de esta manera, entonces la metateoría del sistema es ambigua. El primero es análogo al razonamiento presentado en el apartado anterior. Sea  $\models$  una relación de consecuencia lógica con premisas y conclusiones múltiples que satisface ( $CI_{\text{SET-SET}}$ ). En este trabajo, no ofrezco ninguna teoría del contenido en particular. Sin embargo, considero plausible asumir que, en cualquier teoría del contenido razonable, la inclusión de contenido es una relación reflexiva y transitiva: todo contenido  $x$  está incluido en sí mismo, y siempre que un contenido  $z$  está incluido en otro  $y$ , e  $y$  lo está en otro  $x$ ,  $z$  está incluido en  $y$ . Si lo anterior es correcto, entonces, salvo que los nombres de conjuntos se lean de manera ambigua—i.e. su interpretación varíe según si están a la izquierda o derecha del martillo de implicación—la relación  $\models$  es reflexiva y transitiva también. De ahí se sigue que, si la validez en **MCL** satisface ( $CI_{\text{SET-SET}}$ ), entonces la metateoría del sistema es ambigua. Para ilustrar el punto, sirve el *Ejemplo 1* en la Sección 3.2: **MCL**, interpretada en términos de inclusión de contenido, implicaría que el contenido de  $\{p, q\}$  está incluido en el de  $p \vee q$ , y el de  $p \wedge q$  en el de  $\{p, q\}$ , pero el contenido de  $p \wedge q$  no está incluido en el de  $p \vee q$ —lo cual es absurdo si los términos mantienen fija su denotación.

El segundo argumento se basa en las posibles lecturas del conjunto vacío,  $\emptyset$ . ¿Cuál es su contenido? Hay al menos dos alternativas plausibles:

- (a)  $\emptyset$  tiene un contenido *total*, i.e. para cualquier conjunto de oraciones  $\Gamma$ , el contenido de  $\Gamma$  está incluido en el de  $\emptyset$
- (b)  $\emptyset$  tiene un contenido *nulo*, i.e. para cualquier conjunto de oraciones  $\Gamma$ , el contenido de  $\emptyset$  está incluido en el de  $\Gamma$

De hecho, creo que las alternativas plausibles son *a lo sumo* esas dos. No parece razonable decir que  $\emptyset$  tiene algún tipo de contenido *parcial*. ¿Qué contenido sería ese?  $\emptyset$  debería implicar algunas oraciones (aunque no todas), y no hay candidatas obvias. Las únicas que se me ocurren son las tautologías, pero solemos decir que carecen de contenido. Quizás,

podemos romper con la ortodoxia y decir que tanto las tautologías como  $\emptyset$  tienen algún tipo de contenido *sui generis*. Pero la idea me parece bastante aventurada, y no veo una manera atractiva de hacerla precisa. Por ende, restrinjo mi análisis a las lecturas (a) y (b).

Volvamos a nuestra relación  $\models$  que, recordemos, satisface  $(CI_{\text{SET-SET}})$ . Supongamos que la metateoría de  $\models$  es no ambigua, es decir, los conjuntos reciben la misma interpretación cuando sus nombres aparecen a la izquierda y la derecha del martillo de implicación. Es claro que, si  $\models$  se ajusta a la interpretación (a) de  $\emptyset$ , entonces para cualquier conjunto de oraciones  $\Gamma$ ,  $\emptyset \models \Gamma$ . Por otra parte, si  $\models$  se ajusta a la interpretación (b), entonces para cualquier  $\Gamma$ ,  $\Gamma \models \emptyset$ . El sistema **CCL** se ajusta a una de las dos, a saber la (b)—por eso decimos que, en **CCL**, el conjunto vacío funciona como  $\top$ , o es tautológico. Pero **MCL** no se adecúa a ninguna de las dos; por ejemplo, toda oración contingente ni implica ni es implicada por  $\emptyset$ —es decir,  $\emptyset$  no funciona ni como  $\top$  ni como  $\perp$ , no es tautológico ni contradictorio. Luego, **MCL**, a diferencia de **CCL**, es incompatible con una lectura no ambigua—y razonable—del conjunto vacío. Concluimos, otra vez, que **MCL** es ambigua cuando interpretamos la validez en términos de inclusión de contenido.

La idea de que la lógica clásica puede en alguna de sus presentaciones modelar la inclusión de contenido carece de popularidad hoy en día. La principal razón es que sobregenera inferencias válidas. Un ejemplo típico es la regla de adición, que a partir de una fórmula  $A$  permite concluir  $A \vee B$ , para cualquier  $B$ . Pero  $B$  podría introducir un nuevo tema de conversación, que no tenga nada que ver con el de  $A$ ; luego, no parece sensato afirmar que, en general, el contenido de  $A \vee B$  está incluido en el de  $A$ . Parry (1968, p. 151) expresa el punto de manera colorida,

If a system contains the assertion that two points determine a straight line, does the theorem necessarily follow that either two points determine a straight line or the moon is made of green cheese? No, for the system may contain no terms from which ‘moon,’ etc., can be defined.

En consecuencia, la mayoría de las lógicas de la inclusión de contenido que se han estudiado en las últimas décadas son no clásicas.<sup>3</sup> Esto podría, quizás, constituir una objeción, no

<sup>3</sup>Véanse, por ejemplo, Ackermann (1956), Brady (1996), Ferguson (2015), Parry (1933), Priest (1999), y Szmuc (2021).

tanto contra la solidez de la argumentación que esboqué antes, sino contra su relevancia. La idea es que, *para empezar*, la lógica **MCL** no era una candidata plausible para modelar la inclusión de contenido; luego, mostrar que no puede hacerlo de manera no ambigua no aporta nada demasiado nuevo o desafiante.

Sin embargo, mi argumento para mostrar la ambigüedad de **MCL** no apeló a ninguna de las características distintivas que el sistema tiene por ser clásico. Por el contrario, sólo usé rasgos—como su no reflexividad y no transitividad—que se explican por el hecho de que el sistema induce una lectura conjuntiva de las premisas, pero disyuntiva de las conclusiones. Por esa razón, lo dicho en esta sección tiene relevancia filosófica para defender al enfoque conjuntivo en un amplio rango de lógicas no clásicas; en particular, en todas aquellas que pretendan modelar la validez como inclusión de contenido, y admitan conclusiones múltiples.

## 4.2. Por qué importa evitar la ambigüedad

Si mi argumentación hasta ahora resultó convincente, tenemos buenas razones para pensar que la metateoría de **MCL** es ambigua.<sup>4</sup> La ambigüedad en cuestión no se reduce al hecho de que las comas signifiquen una cosa a la izquierda y otra a la derecha del martillo de implicación—tal fenómeno sería en efecto eliminable reemplazando todas las comas a uno u otro lado con algún símbolo alternativo. La ambigüedad radica en que los relata de la relación de consecuencia, esto es, los conjuntos, reciben interpretaciones filosóficas distintas dependiendo de qué lugar ocupen en el enunciado metateórico. En particular, cuando la validez se explica en términos de preservación de verdad (o satisfacción), las condiciones bajo las cuales un conjunto se considera ‘verdadero’ (‘satisfecho’) varían a la izquierda y a la derecha del martillo—exigen la verdad de *todas* las oraciones a la izquierda, y la verdad de *al menos una* a la derecha. Cuando la validez se explica en términos de inclusión de contenido, el contenido de ciertos conjuntos varía— $\emptyset$  se comporta como si

---

<sup>4</sup>En la Sec. 4.1 consideré dos posibles maneras de entender la validez: como preservación de verdad y como inclusión de contenido. Una posible objeción es que mi indagación no fue exhaustiva; en particular, no dije nada acerca del inferencialismo, y su explicación de la validez en términos de existencia de pruebas. Ahora bien, creo que la postura inferencialista recibe un análisis adecuado en la Sec. 4.3, en donde hablo de **TONK**. Allí, sostengo que la coma metateórica de **MCL** y **TONK** son ambiguas en un sentido parecido.

careciera de contenido cuando está a la izquierda, y como si tuviera contenido total cuando está a la derecha. Este tipo de ambigüedad no es eliminable por medio de convenciones notacionales razonables.

La primera objeción que mencioné en este Capítulo sostiene, recordemos, que la clase de ambigüedad que **MCL** ostenta es no problemática, porque no genera confusiones. Ahora, la objeción puede ser resistida. Quien defiende el enfoque disyuntivo debe dar una explicación de la validez. Si entiende la validez como preservación de verdad (o satisfacción) entre conjuntos, debería estar en condiciones de responder qué significa que un conjunto de oraciones es verdadero (o satisfecho), y su respuesta no debería estar condicionada por qué lugar ocupa el nombre del conjunto en el enunciado del cual forma parte. De manera análoga, si entiende la validez en términos de inclusión de contenido, debería estar en condiciones de responder cuál es el contenido de cualquier conjunto dado, y en particular, el del conjunto vacío; otra vez, esperamos que su respuesta no dependa de factores sintácticos. Creo, por tanto, que el enfoque disyuntivo está en apuros. Contra lo que la objeción sugiere, las confusiones no son el único inconveniente que la ambigüedad puede generar. En este caso, la ambigüedad es problemática porque hace que nuestra visión acerca de cierto fenómeno (v.g. las condiciones de verdad de un conjunto, o su contenido) varíe con arreglo a factores que nos parecen irrelevantes para el fenómeno en cuestión (la posición sintáctica que el conjunto ocupa).

En este punto, se me ocurren tres estrategias que podría adoptar quien defiende el enfoque disyuntivo. Algunas ya fueron mencionadas al pasar, cuando evaluamos si la ambigüedad metateórica de **MCL** es eliminable. Las presento y analizo en orden.

La primera consiste, a grandes rasgos, en sacrificar ciertos modos usuales de hablar acerca de la validez. Quien antes decía que **MCL** preserva verdad (o satisfacción), admitiría ahora haber sido impreciso. Dado un argumento cualquiera válido en **MCL**, no hay dos entidades tales que la verdad (o satisfacción) se preserve de una a la otra; todo lo que tenemos es que siempre que las premisas son *todas* verdaderas (o satisfechas), *alguna* conclusión lo es. Quien antes decía que **MCL** (o cualquier sistema no clásico que induzca una lectura disyuntiva de las conclusiones) caracteriza la inclusión de contenido, admitiría

haber sido imprecisx también. **MCL** (o el sistema de interés) caracteriza la inclusión de contenido a lo sumo en un subconjunto reducido de sus argumentos válidos—quizás, aquellos que tienen una sola conclusión.

La ventaja de esta respuesta es que permite que la metateoría de **MCL** sea no ambigua. Podríamos decir, por ejemplo, que un conjunto de oraciones siempre es verdadero (o satisfecho) bajo las mismas condiciones, y eso no sería problemático porque la validez no estaría caracterizada en términos de preservación de verdad (o satisfacción). Podríamos también decir, por ejemplo, que el conjunto vacío siempre tiene un contenido nulo, y esto no sería problemático tampoco, porque la validez no estaría caracterizada como inclusión de contenido. Las desventajas de la respuesta son, en primer lugar, su costo en términos de revisión teórica (parecía que los argumentos válidos preservan verdad, pero ¡estábamos equivocados!); en segundo lugar, la reducción en el rango de aplicación de las lógicas de conclusiones múltiples (ninguna puede proporcionar una caracterización completa y correcta de la inclusión de contenido entre conjuntos).

La segunda estrategia consiste en sacrificar la idea de que, cuando trabajamos con lo que se denominan ‘conclusiones múltiples’, los relata de la relación de consecuencia son conjuntos. Quien defiende el enfoque disyuntivo diría, en cambio, que cada nombre de conjunto funciona como abreviatura de una oración, quizás infinita. Un posible esquema de desabreviación sería el siguiente: si el conjunto es no vacío, entonces, si está a la izquierda del martillo, denota la conjunción de sus oraciones, y si está a la derecha, su disyunción; si el conjunto es vacío, entonces, si está a la izquierda del martillo denota  $\top$ , y si está a la derecha,  $\perp$ . Así, la relación de consecuencia iría, en sentido estricto, de oraciones a oraciones.

La ventajas de esta respuesta son dos. Primero, que la metateoría de **MCL** sería no ambigua en su versión desabreviada. Segundo, que **MCL** sería candidata a preservar verdad, y quizás, alguna lógica de ‘conclusiones múltiples’ podría caracterizar la inclusión de contenido. Las desventajas, sin embargo, son abrumadoras. Por empezar—y como ya mencioné en el apartado 4.1.1—quien defiende el enfoque disyuntivo estaría renunciando

a la idea misma de que hay argumentos con premisas o conclusiones múltiples.<sup>5</sup> Además, al sostener que los nombres de conjuntos no son más que abreviaturas, estaría defendiendo una interpretación no literal del vocabulario utilizado en la práctica común de la Lógica; e postulado de una tal interpretación requiere una justificación independiente, para no ser objetado por *ad hoc*. Tercero y último, *incluso* si hubiera razones independientes para la interpretación no literal propuesta, queda el hecho de que, en **MCL**, los conjuntos son abreviaturas ambiguas (si bien no confundentes); por un principio de economía, cualquier teoría alternativa a **MCL** en donde los conjuntos sean abreviaturas no ambiguas es, *ceteris paribus*, preferible—y claro está, **CCL** es una tal teoría.

La tercera y última estrategia consiste en buscar una justificación filosófica para la ambigüedad. Por ejemplo, quien defiende el enfoque disyuntivo podría buscar evidencia para sostener que cuando afirmamos un conjunto en cuanto premisa de nuestro argumento, nos comprometemos con que todas sus oraciones son verdaderas, pero cuando lo afirmamos en cuanto conclusión, nos comprometemos sólo con que alguna lo es. También, podría sostener que, por alguna razón, el contenido informativo de ciertos conjuntos varía dependiendo de su contexto de aparición en el discurso; así, por ejemplo,  $\emptyset$  tiene contenido nulo cuando está a la izquierda del martillo, pero total cuando está a la derecha.

En caso de ser exitosa, esta estrategia es, creo yo, la mejor de las tres. Sin embargo, no veo ninguna manera obvia de llevarla a cabo. Queda para quienes defienden el enfoque disyuntivo analizar si es viable.

A modo de resumen y conclusión. Sostuve que la ambigüedad en la metateoría de **MCL** es problemática, porque implica que ciertas propiedades de los conjuntos (a saber, su contenido o condiciones de verdad) se ven afectadas por un factor *prima facie* arbitrario (la posición sintáctica de sus nombres). Consideré tres estrategias que, en respuesta a este problema, puede asumir quien defiende el enfoque disyuntivo. Las primeras dos estrategias son fáciles de llevar a cabo, pero bastante (sino muy) costosas. El desafío que suponen es el de mostrar en qué sentido el enfoque disyuntivo es preferible al conjuntivo, como para justificar tales costos. La última estrategia no es tan costosa, pero en cambio

---

<sup>5</sup>Nótese que, para hacerlo de manera justificada, debe responder de manera satisfactoria al tipo de razones que suelen motivar la admisión de tales argumentos (cf. Sec. 3.1.2)

difícil de realizar. El desafío que supone es el de encontrar razones convincentes para pensar que la posición sintáctica de los nombres de conjuntos es—contra las primeras apariencias—relevante para las propiedades que esos conjuntos puedan ostentar.

### 4.3. ¿Un TONK estructural?

A continuación, presento una analogía que, en lo personal, me parece iluminadora. Comparo la célebre y malquerida conectiva TONK, por un lado, y la coma metainferencial de MCL, por otro. Sugiero que, quienes se alinean con la ortodoxia y consideran que TONK es una expresión ilegítima, tienen buenas razones para pensar que la coma en MCL es ilegítima también.

El *inferencialismo lógico* es, de manera sucinta, la tesis de que el significado de las constantes lógicas está determinado por las reglas que gobiernan su uso.<sup>6</sup> Prior (1960) ofrece TONK como contraejemplo a la tesis; la conectiva está gobernada por el siguiente par de reglas, en donde  $\vdash$  denota la relación de deducibilidad:

$$\text{(TONK-I)} \quad A \vdash A\text{-TONK-}B \qquad \text{(TONK-E)} \quad A\text{-TONK-}B \vdash B$$

La idea es que *tonk* no es una constante lógica legítima, o en otras palabras, carece de significado. El motivo es que trivializa cualquier sistema transitivo que tenga al menos un teorema, digamos, ‘A’, gracias a la siguiente derivación

$$\frac{\text{TONK-I} \frac{A}{A\text{-TONK-}B}}{\text{TONK-E} \frac{A\text{-TONK-}B}{B}}$$

La moraleja sería que, contra lo que el inferencialismo lógico podía suponer, no todo par de reglas de introducción y eliminación determinan una expresión lógica legítima. Luego de Prior, múltiples simpatizantes del inferencialismo intentaron especificar las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un par de reglas de hecho determinan una conectiva.

Consideremos, ahora, la coma metateórica en MCL. Como es claro, sirve para agregar premisas o conclusiones. Ahora bien, las premisas y conclusiones de un argumento en MCL son siempre conjuntos; por ejemplo, el enunciado metateórico  $p \models_{\text{MCL}} p$  dice

<sup>6</sup>Para una introducción crítica al inferencialismo en general, y al inferencialismo lógico en particular, véase Murzi y Steinberger (2017).

que el conjunto  $\{p\}$  se autoimplica. Luego, una manera razonable de entender la coma es como denotando la operación de unión entre conjuntos. Así, leemos el enunciado  $p, q \models_{\mathbf{MCL}} p$  como diciendo que el conjunto  $\{p\} \cup \{q\}$ , idéntico a  $\{p, q\}$ , implica  $\{p\}$ . Para lo que sigue, es importante tener presente que la unión de cualquier conjunto con el vacío devuelve el mismo conjunto; por ende, el anterior enunciado también nos dice que  $\{p, q\} \cup \emptyset$  implica  $\{p\} \cup \emptyset$ . Creo que una metáfora útil consiste en pensar que el comportamiento de la coma describe lo que podríamos denominar la *lógica* de la operación de unión: nos dice qué uniones entre conjuntos se siguen unas de otras.<sup>7</sup>

La primer semejanza manifiesta entre TONK y la coma en **MCL** radica en su comportamiento inferencial. Es usual decir que TONK se introduce como una disyunción y se elimina como una conjunción, y las razón salta a la vista con sólo ojear sus reglas. De manera análoga, los conjuntos en **MCL** se leen de manera disyuntiva del lado de las conclusiones—es decir, en donde aparece la conectiva relevante en toda regla de introducción—y de manera conjuntiva del lado de las premisas—en donde aparece la conectiva relevante en toda regla de eliminación. De hecho, si representamos el comportamiento de la coma en **MCL** de manera gráfica, vemos que es similar al de TONK:

$$(U-I) \quad \Gamma \vdash \Gamma, \Delta$$

$$(U-E) \quad \Gamma, \Delta \vdash \Delta$$

Por supuesto, no podemos decir que TONK y la coma en **MCL** sean meras variantes notacionales una de la otra, porque TONK pertenece al lenguaje objeto y la coma no. Sin embargo, es claro que la lógica que regula ambas expresiones es, en algún sentido, la misma. En este punto, cobra relevancia el hecho de que, como mencioné en la Introducción, la adición de un principio de transitividad irrestricta a **MCL** trivializa el sistema. En efecto, es fácil ver que tanto TONK como una coma metateórica que respete U-I y U-E trivializan sistemas transitivos.

Contra lo anterior, alguien podría objetar que, de hecho, los comportamientos de TONK y la coma en **MCL** difieren. El motivo es que la coma representa la unión entre conjuntos, y por ende, respeta las propiedades que la teoría de conjuntos le impone. En

<sup>7</sup>*Prima facie*, otra opción para interpretar la coma es entenderla como el símbolo de puntuación usado al definir conjuntos por extensión. Pero creo que esta opción no es conveniente, al menos cuando consideramos esquemas: dado el enunciado  $\Gamma, A \models B$ , lo que queremos decir es que  $B$  se sigue de  $\Gamma \cup \{A\}$ , no de  $\{\Gamma, A\}$ .

particular, la coma es conmutativa ( $\{A\} \cup \{B\}$  y  $\{B\} \cup \{A\}$  son el mismo conjunto), mientras que TONK no lo es, o al menos no por definición ( $A\text{-TONK-}B$  y  $B\text{-TONK-}A$  son oraciones distintas, y las reglas de TONK no dictaminan la equivalencia de ambas). Luego, los comportamientos inferenciales de TONK y la coma no son idénticos, después de todo.

Sin embargo, creo que la semejanza señalada no tiene relevancia alguna para el problema filosófico que nos concierne, y por ende, no afecta mi analogía. Por otra parte, si la semejanza resultara ser por algún motivo relevante, podríamos enseguida definir una conectiva TONCK con las siguientes reglas:

$$\begin{array}{ll} (\text{TONCK-I}) & A \vdash A\text{-TONCK-}B \\ & A \vdash B\text{-TONCK-}A \\ (\text{TONCK-E}) & A\text{-TONCK-}B \vdash A \\ & B\text{-TONCK-}A \vdash A \end{array}$$

y usarla en lugar de TONK para nuestra analogía—nótese que TONCK es no menos problemática que TONK, dado que también trivializa todo sistema transitivo que contenga al menos un teorema. A efectos de mantener la discusión simple, en lo que sigue continúo hablando de TONK tal como la formuló Prior, y no su prima conmutativa.

La segunda semejanza entre TONK y la coma en **MCL** radica en ciertas ‘curas’ que se han encontrado para su mal comportamiento. *Por un lado*, ha habido intentos de encontrar lógicas en las que TONK pueda ser admitida como conectiva legítima. Por ejemplo, Cook (2005) define, siguiendo una sugerencia hecha al pasar por Belnap, una lógica no transitiva en donde TONK puede ser agregada sin trivialidad y de manera conservativa.<sup>8,9</sup> Luego, Fjellstad (2015) argumenta que una lógica adecuada para tonk debe ser no sólo no transitiva, sino también no reflexiva. La razón es que, en un cálculo de secuentes que satisface reflexividad, las reglas plausibles para tonk no logran determinar una conectiva

<sup>8</sup>Sean  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  dos lenguajes tales que  $\mathcal{L}_2$  expande  $\mathcal{L}_1$ . Un sistema  $\mathbf{S}_2$  formulado en  $\mathcal{L}_2$  es una *extensión conservativa* de otro sistema  $\mathbf{S}_1$  formulado en  $\mathcal{L}_1$  si y sólo si (i) todo argumento válido en  $\mathbf{S}_1$  es válido en  $\mathbf{S}_2$ , y (ii) todo argumento válido en  $\mathbf{S}_2$  pero no en  $\mathbf{S}_1$  contiene expresiones perteneciente  $\mathcal{L}_2$  pero no a  $\mathcal{L}_1$ .

<sup>9</sup>Los detalles de la lógica de Cook no necesitan detenernos. En esencia, se trata de un sistema cuatri-valuado definido sobre las matrices de FDE (véase Priest, 2008, p. 142), en donde un argumento es válido si y sólo si se cumple alguna de estas dos condiciones: (a) que para toda interpretación, si las premisas son todas verdaderas (i.e. reciben valor 1 o  $b$ ) entonces la conclusión es verdadera también; (b) que para toda interpretación, si la conclusión es no verdadera (i.e. recibe 0 o  $n$ ) entonces alguna premisa es no verdadera también.

única.<sup>10-11</sup> Pero si una conectiva no está determinada por sus reglas de manera única, entonces no podemos decir que hemos definido *la* conectiva en cuestión, sino, a lo sumo, una *colección* de conectivas, a saber, la de todas las que satisfacen esas reglas. Fjellstad ofrece una lógica no transitiva y no reflexiva en donde TONK también puede ser agregada de manera conservativa.<sup>12</sup> *Por otro lado*, la coma metateórica en **MCL** suele ser considerada legítima sin mayores reparos. Desde que Gentzen introdujo las conclusiones múltiples, poco o nada se debatió el comportamiento de la coma en lo que respecta a su coherencia filosófica. (Las pocas discusiones que hubo se centraron, en cambio, en si hay o no argumentos con conclusiones múltiples en el lenguaje natural.) Sin embargo, creo que la coma en **MCL** tiene un comportamiento al menos tan patológico como TONK, dado que también trivializa sistemas transitivos. Y lo que me interesa destacar es que, de hecho, Gentzen y toda la ortodoxia posterior mitigan el comportamiento patológico de la coma en **MCL** por medios análogos a los que se nos recomienda para TONK, a saber, asumiendo que la relación de consecuencia es no transitiva y no reflexiva. En ese sentido, ambos males son tratados con el mismo remedio.

Quizás, alguien podría objetar, otra vez, que hay diferencias entre la coma en **MCL** y TONK. Las reglas de TONK (si bien quizás no *la* conectiva misma, si a tal efecto exigimos unicidad) son admisibles sin trivialidad en un cálculo reflexivo pero no transitivo. En cambio, las reglas para la coma en **MCL** son patológicas en un sentido distinto, porque

<sup>10</sup>Digo reglas ‘plausibles’ porque, claro está, no se trata de las reglas TONK-I y TONK-E, que son de deducción natural. Las reglas que usa Fjellstad son

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{B\text{-TONK-}A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{L-TONK} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A\text{-TONK-}B} \text{R-TONK}$$

<sup>11</sup>Dada una conectiva  $\star$  y una relación de deducibilidad  $\vdash$ , decimos que las reglas de  $\star$  determinan la conectiva de manera *única* en  $\vdash$  si y sólo si, para cualquier conectiva  $\circ$  cuyas reglas sean de forma idéntica a las de  $\star$  se cumple que

- (a)  $\Gamma, \star(A_1, \dots, A_n) \vdash \Delta$  si y sólo si  $\Gamma, \circ(A_1, \dots, A_n) \vdash \Delta$ , y
- (b)  $\Gamma \vdash \Delta, \star(A_1, \dots, A_n)$  si y sólo si  $\Gamma \vdash \Delta, \circ(A_1, \dots, A_n)$

es decir,  $\star$  y  $\circ$  cumplen el mismo rol inferencial: son equivalentes en tanto premisa, y también en tanto conclusión.

<sup>12</sup>Otra vez, los detalles técnicos son secundarios para nuestra discusión. Fjellstad se basa en las valuaciones duales de Humberstone (1988). Define una interpretación como un par  $\langle v_p, v_c \rangle$  en donde  $v_p$  y  $v_c$  son valuaciones clásicas, y se cumplen las siguientes condiciones: (i) para toda variable proposicional  $p$ ,  $v_p(p) = v_c(p)$ , (ii)  $v_c(A\text{-TONK-}B) = 1$  si y sólo si  $v_c(A) = 1$ , y (iii)  $v_p(A\text{-TONK-}B) = 1$  si y sólo si  $v_p(B) = 1$ . Un argumento es válido si y sólo si, para toda interpretación, si todas las premisas son verdaderas según  $v_p$ , la conclusión es verdadera según  $v_c$ .

trivializan todo sistema transitivo o reflexivo. Este diferente tipo de patologicidad rompería la analogía entre las dos expresiones.

Mi primer respuesta es que, si la objeción *estuviera* en lo cierto, entonces tanto peor para el enfoque disyuntivo. El punto de mi analogía es mostrar que la coma en **MCL** se asemeja en algunos importantes aspectos a TONK; bajo el supuesto de que TONK es en algún sentido ilegítima, de ahí me permito inferir que la coma en **MCL** es ilegítima también. Ahora, si *además* de su semejanza con TONK, la coma en **MCL** exhibe rasgos patológicos adicionales, eso no hace más que reforzar el objetivo de mi argumento. La carga de la prueba es cada vez más pesada para el enfoque disyuntivo. Mi segunda respuesta—quizás de menor relevancia dialéctica, aunque más interés filosófico—es que hay un importante sentido en que la analogía queda intacta. Para empezar, consideremos la siguiente noción:

**Definición 69.** Sea  $\Rightarrow$  una relación de consecuencia en  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ , y  $\star$  una operación diádica sobre conjuntos. Decimos que  $\Rightarrow$  es  $\Gamma\text{-}\star$ -trivial si y sólo si, para todo conjunto (quizás vacío) de oraciones  $\Delta$ , se da que  $\Delta \star \Gamma \Rightarrow \Gamma$  y  $\Gamma \Rightarrow \Gamma \star \Delta$ .

Como **MCL** valida monotonía tanto izquierda como derecha, es trivial corroborar (valga la polisemia) que la lógica es  $\Gamma\text{-}\cup$ -trivial para todo conjunto de oraciones  $\Gamma$  salvo el vacío. La única instancia de reflexividad que falta en **MCL** es  $\emptyset \Rightarrow \emptyset$ . Dado cualquier cálculo para **MCL** en donde las reglas de monotonía sean derivables, el agregado de esa instancia hace que el sistema sea  $\Gamma\text{-}\cup$ -trivial para todo conjunto  $\Gamma$ —es decir, trivial *a secas*. Ahora consideremos la siguiente noción:

**Definición 70.** Sea  $\Rightarrow$  una relación de consecuencia en  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ , y  $\circ$  una conectiva diádica en  $\mathcal{L}$ . Decimos que  $\Rightarrow$  es  $A\text{-}\circ$ -trivial si y sólo si, para toda oración  $B$ , se da que  $A \Rightarrow A \circ B$  y  $A \circ B \Rightarrow A$ .

El punto de mi respuesta es que la lógica reflexiva de Cook es  $A\text{-TONK}$ -trivial, *para toda oración A*. Así, hay un sentido relevante de trivialidad que la coma en **MCL** y TONK comparten. La idea intuitiva es que, en presencia de reflexividad, ambas expresiones pueden adosarse *ad libitum* a (las entidades del tipo adecuado en) las premisas y conclusiones de argumentos válidos, y los argumentos resultantes son válidos también. Por supuesto, las

consecuencias de este fenómeno son distintas en un caso y en otro. La coma de **MCL** se aplica sobre conjuntos; como el sistema es monótono, y uno de los conjuntos admisibles es el vacío, la trivialidad *sui generis* descrita colapsa con la temida trivialidad ordinaria. En cambio, TONK sólo se aplica sobre oraciones, por lo que, en ausencia de transitividad, la trivialidad ordinaria puede ser evitada. A pesar de lo anterior, creo que, a nivel estructural, las dos expresiones manifiestan un comportamiento análogo.<sup>13</sup>

La tercer y última conexión que quiero trazar entre la coma en **MCL** y TONK tiene que ver con los posibles ‘diagnósticos’ de por qué estas expresiones son patológicas. Belnap (1962) ofrece una de las explicaciones más aceptadas de la patogenicidad de TONK. El autor comienza,

It seems to me that the key to a solution lies in observing that (...) we are not defining our connectives *ab initio*, but rather in terms of an antecedently given context of deducibility, concerning which we have some definite notions.

La idea es que cuando definimos una conectiva nueva, asumimos un cierto ‘contexto de deducibilidad’, que incluye, al menos, las propiedades estructurales de nuestra relación de consecuencia.<sup>14</sup> Así, por ejemplo, cuando Prior define TONK asume que la relación de consecuencia es transitiva—supuesto que habilita su resultado de trivialidad. Belnap sugiere que un requisito *necesario* para que una conectiva sea legítima es que sea conservativa respecto del contexto de deducibilidad en que se inserta.<sup>15</sup> TONK, por supuesto, viola este requisito en contextos transitivos, y eso explica por qué, en tales contextos, es ilegítima. Ahora bien, podemos contar una historia parecida en lo que toca a la coma en **MCL**. Sea  $\Rightarrow$  cualquier relación de consecuencia de premisas y conclusiones simples. Asumamos que  $\Rightarrow$  es transitiva y no trivial—este es nuestro contexto de deducibilidad. Ahora, imaginemos que extendemos  $\Rightarrow$  a premisas y conclusiones múltiples. Sabemos

<sup>13</sup>Es cierto que es posible definir, semánticamente, sistemas no transitivos pero reflexivos que no son *A*-TONK-triviales para toda oración *A* (véase, v.g. Fjellstad, 2015, p. 5). Sin embargo, sistemas análogos no existen para la conectiva TONK\*. Como mi objetivo es emparentar la coma metateórica de **MCL** con el fenómeno TONK, antes que con la conectiva tal como la define Prior, creo que mi analogía queda intacta.

<sup>14</sup>Como señalan Dicher y Paoli (2018), no es del todo claro qué incluye exactamente el contexto de deducibilidad según Belnap. Humberstone (2011, p. 538) entiende que *sólo* las propiedades estructurales; Garson (2001), que todos los principios lógicos con los que estamos comprometidos en el fragmento del lenguaje sin la conectiva nueva a definir.

<sup>15</sup>Para la noción de extensión conservativa, véase np. 8.

que si la coma ‘,’ metateórica satisface los principios  $\cup$ -I y  $\cup$ -E, la extensión es trivial, y por ende no conservativa. Asumiendo un criterio análogo al de Belnap, concluimos que cualquier coma metateórica que satisfaga los principios  $\cup$ -I y  $\cup$ -E es una expresión ilegítima en contextos transitivos.

Otra manera de explicar la patologicidad de TONK consiste en decir que, en algún sentido, sus reglas carecen de armonía. Gentzen sugirió, en su trabajo seminal en deducción natural (1934–35), que la regla de introducción de una conectiva constituye algo así como su ‘definición’, dado que nos dice cuándo una oración con esa conectiva como constante principal puede ser afirmada. La regla de eliminación, en cambio, se adecúa a lo que es legítimo inferir de la oración en cuestión, *dadas* las condiciones que la regla de introducción impone. Prawitz (1965/2006) desarrolló esta idea y propuso lo que hoy se conoce como *principio de inversión*:

**PI.** Sea  $\alpha$  una aplicación de una regla de eliminación que tiene  $B$  como consecuencia. A partir de las deducciones que permiten obtener las premisas de  $\alpha$ , debe ser posible obtener una deducción de  $B$  en donde se omita  $\alpha$

(Adapté la formulación de Prawitz para facilitar la lectura.) En términos informales, el principio dice que una buena regla de eliminación es redundante: no agrega nada a lo que ya sabíamos si obtuvimos sus premisas por medio de reglas de introducción. Es inmediato ver que TONK viola **PI**: sus reglas nos permiten concluir a partir de  $A$ -TONK- $B$  más de lo que no nos exigen para inferir esa misma expresión; en particular, nos permiten concluir  $B$ , cuando sólo nos exigen  $A$ . Y otra vez, podemos hacer un punto análogo respecto de **MCL**. El sistema nos permite concluir, a partir de  $\{A\} \cup \{B\}$ , más de lo que nos exige para inferir ese mismo conjunto; en particular, nos permite concluir  $\{B\}$ , cuando sólo nos exige  $\{A\}$ . Podemos decir, así, que la ‘lógica de la unión’ en **MCL** es ilegítima.<sup>16</sup>

Quizás, una posible respuesta es que mi analogía es errada, porque confunde niveles de lenguaje que han de permanecer separados. Los criterios inferencialistas de conservatividad e inversión fueron pensados para constantes lógicas del lenguaje objeto, i.e. el

<sup>16</sup>Consideraré dos explicaciones de por qué TONK es ilegítima. La primera, de Belnap, sólo concluye que TONK es ilegítima en contextos *transitivos*; de manera correspondiente, sólo nos habilita a afirmar, por analogía, que la coma en **MCL** es ilegítima en tales contextos. La explicación Gentzen-Prawitz, en cambio, habla de legitimidad *a secas*; por eso, en este párrafo, le atribuyo a **MCL** ilegitimidad sin más.

lenguaje sobre el cual teorizamos, a cuyas expresiones les queremos dar una semántica, y que solemos usar para modelar el comportamiento de (ciertos fragmentos de) las lenguas vernáculas. Las comas de **MCL**, en cambio, están en el metalenguaje; son un mero accesorio teórico, útil para el estudio del lenguaje objeto, pero cuyo significado no nos interesa y que, de hecho, puede no tener ningún correlato interesante en las lenguas habladas. Luego, imponer los requisitos inferencialistas a las comas de **MCL** está fuera de lugar.

La respuesta suena intrépida, pero no me convence. El inferencialismo lógico es una tesis sobre el significado de las expresiones *lógicas*. Ahora, las expresiones lógicas no se encuentran sólo en los lenguajes objeto de nuestras teorías; todo lo contrario, proliferan en nuestro uso del lenguaje cotidiano, en nuestros discursos científicos, y también—el punto clave—en nuestras reflexiones metateóricas. Luego, el hecho de que la coma de no sea parte del lenguaje objeto no es, por sí mismo, razón suficiente para pensar que no es una expresión lógica. Además, creo que hay razones independientes para pensar que de hecho lo es. En mi visión, el comportamiento de la coma metateórica nos informa qué uniones de conjuntos se siguen unas de otras. Esa información es relevante, sino incluso esencial, en un estudio de la validez de conclusiones múltiples. Más aún, no hay consenso acerca de cual es el comportamiento adecuado de la coma. Por un lado, diversas lógicas subestructurales repudian algunas de las propiedades que la coma satisfacen en la lógica clásica. Por otro lado, en este trabajo sostuve que, incluso dentro del paradigma clásico, no hay una única manera razonable en que la coma puede ser definida. Todo eso constituye, a mi juicio, evidencia en favor de que el comportamiento de la coma sí es un aspecto relevante de una teoría lógica, acerca del cual vale la pena argumentar, y cuya coherencia interna (para no abusar de la noción de ‘legitimidad’) vale la pena analizar.

Concluyo esta sección con la idea a la cual, según anuncié, apuntaba toda la analogía, y es que quienes piensan que TONK es una conectiva ilegítima en alguna medida o sentido, tienen buenas razones para pensar que la coma (o si se quiere, o el comportamiento conjuntístico, o la operación de unión) de **MCL** es ilegítima también, en una medida y en un sentido bastante similares.

## Coda: Categoricidad

---

Para terminar la parte expositiva de la Tesis, dedico unas páginas a una posible objeción por parte de quienes defienden el enfoque disyuntivo. Carnap (1943) introduce en la literatura lo que se conoce como el problema de la *categoricidad*. En pocas palabras, consiste en que las valideces de la lógica clásica de conclusiones simples no logran determinar de manera unívoca las tablas de verdad de las conectivas estándar. El fenómeno afecta, en particular, a la disyunción y la negación. Sus tablas son

$A$	$B$	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A$	$\neg A$
1	0
0	1

La validez clásica se define como preservación de ‘verdad’ o valor 1. Consideremos primero la disyunción. Las valideces  $A \vdash A \vee B$ , y  $B \vdash A \vee B$ , nos permiten recuperar las primeras tres filas de la tabla, esto es, decir que siempre que  $A$  es verdadera o  $B$  es verdadera,  $A \vee B$  es verdadera. Sin embargo, ninguna validez nos fuerza a aceptar la última fila. Existen valuaciones que satisfacen todas las valideces de la lógica clásica, pero son ‘aberrantes’ en el sentido de que le asignan verdad a disyunciones cuyos disyuntos son ambos falsos. (Para un ejemplo, véase Shoesmith y Smiley, 1978, p. 3.) Consideremos, ahora, la negación. La validez  $\emptyset \vdash A \vee \neg A$  nos permite reconstruir la segunda fila de la tabla, esto es, decir que siempre que  $A$  es falsa,  $\neg A$  es verdadera.<sup>17</sup> Sin embargo, ninguna validez nos fuerza a aceptar la primera fila. Existen valuaciones que satisfacen todas las valideces de la lógica clásica, pero son ‘aberrantes’, esta vez en el sentido de que le asignan verdad a oraciones cuya negación es verdadera. (Un ejemplo paradigmático es la valuación trivial, que le asigna 1 a todas la fórmulas del lenguaje.) El hecho de que haya

---

<sup>17</sup>Estamos asumiendo, por mor del argumento, que la disyunción se comporta de la manera pretendida.

interpretaciones como las mencionadas para la lógica clásica suele ser entendido por analogía con la bien conocida existencia de modelos no estándar para teorías de primer orden (véase ‘Teorema de Löwenheim–Skolem’ en Boolos et al., 2002).

Las conclusiones múltiples disyuntivas ofrecen una solución elegante al problema. Por un lado, la validez  $\{A \vee B\} \vdash \{A, B\}$  nos permite recuperar la última fila de la tabla de la disyunción, esto es, decir que siempre que una disyunción es verdadera, alguno de sus disyuntos es verdadero. Por otro lado, la validez  $\{A, \neg A\} \vdash \emptyset$  nos permite recuperar la primer fila en la tabla de la negación, esto es, decir que, cuando  $A$  es verdadera,  $\neg A$  ha de ser falsa. Así, la lógica clásica de conclusiones múltiples disyuntivas se ve libre de modelos no estándar. Carnap mismo toma este camino para sacar de apuros a la lógica clásica, y Shoemith y Smiley sugieren, de hecho, que el problema de la categoricidad es una de las razones por las que conclusiones múltiples son de interés (p. 7). Ahora bien—continúa la objeción—si leemos las conclusiones múltiples de manera conjuntiva, caemos de vuelta en un callejón sin salida. Por un lado, el argumento  $\{A \vee B\} \vdash \{A, B\}$  es inválido. Por otro lado, el argumento  $\{A, \neg A\} \vdash \emptyset$  es válido, pero una interpretación en que tanto  $A$  como  $\neg A$  son verdaderas no lo contraejemplifica. En ambos casos, no logramos deshacernos de las valuaciones indeseadas. La conclusión es que el enfoque disyuntivo es superior al conjuntivo en un aspecto importante, a saber, el de habilitar una solución razonable al problema de la categoricidad.

Mi respuesta, en resumidas cuentas, es que podemos solucionar el problema de la categoricidad sin apelar a conclusiones múltiples en absoluto. Como señalan Smiley (1996) y Rumfitt (2008), la lógica clásica de conclusiones simples puede descartar las interpretaciones no deseadas del lenguaje si, además de considerar argumentos que preservan el valor 1, consideramos argumentos que preservan el valor 0. Smiley y Rumfitt asocian estos valores con las actitudes mentales de aceptación y rechazo; yo los asocio con las propiedades semánticas de verdad y falsedad, pero la diferencia no es relevante para los propósitos que nos conciernen. Consideremos la siguiente definición:

**Definición 71.** El argumento que va de  $\Gamma$  a  $A$  tiene *validez inversa* en  $\mathbf{CL}$ , abreviado  $\Gamma \Vdash_{\mathbf{CL}} A$ , si y sólo si, para toda  $v \in \text{Val}$ , si  $v(\Gamma) \subseteq \{0\}$  entonces  $v(A) = 0$ .

La validez inversa consiste, entonces, en la preservación de falsedad de premisas a conclusión. El nombre de la propiedad se debe a que, si entendemos la consecuencia lógica como un condicional estricto, entonces en lógica clásica la relación  $\Downarrow$  captura su inversión:  $A \Downarrow B$  si y sólo si  $\neg A \models \neg B$ .<sup>18</sup> Ahora, es fácil corroborar lo siguiente:

**Hecho 41.**

(a)  $A, B \Downarrow_{\text{CL}} A \vee B$

(b)  $\emptyset \Downarrow_{\text{CL}} A \wedge \neg A$

El ítem (a) descarta cualquier valuación que asigne 1 a una disyunción, cuando asigna 0 a sus disyuntos. El ítem (b) descarta la valuación que le asigna 1 tanto a una oración como a su negación. Sabemos, entonces, que un cálculo correcto y completo respecto de las valideces clásicas ordinarias e inversas será categórico, i.e. carecerá de interpretaciones no estándar. En lo que sigue, brindamos un tal cálculo.

Smiley y Rumfitt optan por deducción natural. Nosotros trabajamos con secuentes. Presentamos un sistema que, además de secuentes convencionales, tiene lo que denominamos secuentes *inversos*; son objetos de la forma  $\Gamma \Downarrow A$ , cuya lectura intuitiva es  $\Gamma \Downarrow A$ .

**Definición 72.** El cálculo  $\mathcal{S}_{\text{CL}\Downarrow}$  resulta de tomar  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$ , reemplazar  $\text{Gem-at}$ ,  $\text{R}\rightarrow$  y  $\text{L}\rightarrow$  por  $\text{Gem}$ ,  $\text{R}\neg$ ,  $\text{L}\neg$  y  $\text{Cut}$ , y agregar las reglas siguientes:

$$\begin{array}{l}
 \text{Id}\Downarrow \frac{}{\Gamma, A \Downarrow A} \\
 \text{L}\wedge\Downarrow \frac{\Gamma, A \Downarrow C \quad \Gamma, B \Downarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Downarrow C} \\
 \text{L}\vee\Downarrow \frac{\Gamma, A, B \Downarrow C}{\Gamma, A \vee B \Downarrow C} \\
 \text{L}\neg\Downarrow \frac{\Gamma \Downarrow A}{\Gamma, \neg A \Downarrow \top} \\
 \text{L}\top\Downarrow \frac{}{\Gamma, \top \Downarrow A} \\
 \text{Cut}\Downarrow \frac{\Gamma \Downarrow A \quad A, \Delta \Downarrow C}{\Gamma, \Delta \Downarrow C} \\
 \text{R}\wedge\Downarrow \frac{\Gamma \Downarrow A(B)}{\Gamma \Downarrow A \wedge B} \\
 \text{R}\vee\Downarrow \frac{\Gamma \Downarrow A \quad \Gamma \Downarrow B}{\Gamma \Downarrow A \vee B} \\
 \text{R}\neg\Downarrow \frac{\Gamma, A \Downarrow \top}{\Gamma \Downarrow \neg A} \\
 \text{LNC}\Downarrow \frac{\Gamma, A \Downarrow C \quad \Gamma, \neg A \Downarrow C}{\Gamma \Downarrow C}
 \end{array}$$

<sup>18</sup>La validez inversa fue estudiada bajo el nombre de ‘antivalidez’ por Cobreros et al. (2021). Aquí, sigo la terminología de Fiore et al. (2022).

**Definición 73.**  $\Gamma \top_{\text{CL}\Downarrow} \Delta$  ( $\Gamma \vdash_{\text{CL}\Downarrow} \Delta$ ) si y sólo si, para todo subconjunto finito  $\Delta'$  de  $\Delta$  hay algún subconjunto finito  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tal que  $\Gamma' \Downarrow \Delta'$  ( $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ) es derivable en  $\mathcal{S}_{\text{CL}\Downarrow}$ .

Antes de exhibir el resultado de corrección y completitud, vale la pena ver cómo  $\mathcal{S}_{\text{CL}\Downarrow}$  evita las interpretaciones indeseadas. Por un lado, la regla  $\text{R}\vee\Downarrow$  dice que, si hemos probado la falsedad de  $A$ , y también la falsedad de  $B$ , hemos probado la falsedad de  $A \vee B$ ; así, descarta las valuaciones que son anómalas respecto de la disyunción. Por otro lado, contamos con la derivación

$$\text{LNC}\Downarrow \frac{\text{R}\wedge\Downarrow \frac{\text{Id}\Downarrow \frac{A \Downarrow A}{A \Downarrow A} \quad \frac{\neg A \Downarrow \neg A}{\neg A \Downarrow \neg A} \text{Id}\Downarrow}{A \Downarrow A \wedge \neg A} \quad \frac{\neg A \Downarrow A \wedge \neg A}{\neg A \Downarrow A \wedge \neg A} \text{R}\wedge\Downarrow}{\Downarrow A \wedge \neg A}$$

cuya conclusión descarta la valuación que asigna verdad a una oración y su negación.

Ahora sí,

**Teorema 42.**  $\Gamma \top_{\text{CL}\Downarrow} \Delta$  si y sólo si  $\Gamma \top\top_{\text{CL}} \Delta$

*Demostración.* Dejamos corrección como ejercicio, y pasamos a completitud.

Comenzamos mencionando que las reglas del condicional de  $\mathcal{S}_{\text{CL}}$  son derivables en  $\mathcal{S}_{\text{CL}\Downarrow}$  usando las reglas de la negación y Cut; así,  $\mathcal{S}_{\text{CL}\Downarrow}$  contiene un cálculo correcto y completo para las valideces de **CL**. Ahora, definimos una función de ‘traducción’  $\tau$  que toma fórmulas y devuelve fórmulas, como sigue:

$$\begin{aligned} \tau(p) &= p \\ \tau(\neg A) &= \neg\tau(A) \\ \tau(A \wedge B) &= \tau(A) \vee \tau(B) \\ \tau(A \vee B) &= \tau(A) \wedge \tau(B) \\ \tau(\perp) &= \top \end{aligned}$$

Es decir,  $\tau$  reemplaza cada conjunción por una disyunción, cada  $\perp$  por  $\top$ , y *viceversa* en ambos casos. Usamos  $\tau(\Gamma)$  para denotar al conjunto  $\{\tau(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ . Si  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  es un seciente,  $\tau(\Gamma \Rightarrow \Delta)$  es el seciente inverso  $\tau(\Gamma) \Downarrow \tau(\Delta)$ . Por último, si  $\mathcal{R}$  es una regla,  $\tau(\mathcal{R})$  es la regla que resulta de reemplazar cada seciente  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  en  $\mathcal{R}$  por  $\tau(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ . La prueba apela a dos Lemas.

**Lema 43.** Para cada regla  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{S}_{\text{CL}\downarrow}$  que contiene secuentes, la regla  $\tau(\mathcal{R})$  es derivable en el sistema.

*Demostración.* Por inspección de las reglas correspondientes.  $\square$

**Lema 44.** Si  $\Gamma \Vdash_{\text{CL}} \Delta$ , entonces  $\tau(\Gamma) \models_{\text{CL}} \tau(\Delta)$

*Demostración.* Si  $v$  es una interpretación de  $\mathcal{L}$ , sea  $\tilde{v}$  la interpretación tal que, para cada variable proposicional  $p$ ,  $\tilde{v}(p) = 1 - v(p)$ . Probamos por inducción que, para toda fórmula  $A$  del lenguaje,  $\tilde{v}(\tau(A)) = 1 - v(A)$ .

- *Paso base.*  $A$  es de la forma  $p$ .  $\tau(p) = p$ , por lo que el resultado se sigue por definición de  $\tilde{v}$ .
- *Paso inductivo.* La hipótesis inductiva (HI) es que el resultado vale para cualquier  $A$  de complejidad menor a  $n$ . Sea  $A$  de complejidad  $n$ . Tenemos cuatro casos:

- $A$  es  $\perp$ . Entonces,  $\tilde{v}(\tau(\perp)) = \tilde{v}(\top) = 1 = 1 - v(\perp)$
- $A$  es  $\neg B$ . Entonces,
 
$$\begin{aligned} \tilde{v}(\tau(\neg B)) &= \tilde{v}(\neg\tau(B)) \text{ (por def. } \tau) \\ &= 1 - \tilde{v}(\tau(B)) \text{ (por def. } \neg) \\ &= 1 - (1 - v(B)) \text{ (por HI)} \\ &= 1 - v(\neg(B)) \text{ (por def. } \neg) \end{aligned}$$
- $A$  es  $B \wedge C$ . Entonces,
 
$$\begin{aligned} \tilde{v}(\tau(B \wedge C)) &= \tilde{v}(\tau(B) \vee \tau(C)) \text{ (por def. } \tau) \\ &= \max(\tilde{v}(\tau(B)), \tilde{v}(\tau(C))) \text{ (por def. } \vee) \\ &= \max(1 - v(B), 1 - v(C)) \text{ (por HI)} \\ &= 1 - \min(v(B), v(C)) \text{ (por aritmética)} \\ &= 1 - v(B \wedge C) \text{ (por def. } \wedge) \end{aligned}$$
- $A$  es  $B \vee C$ . El caso es similar al inmediato superior.

Supongamos ahora que  $\tau(\Gamma) \not\models_{\text{CL}} \tau(\Delta)$ . Entonces, hay una valuación  $v$  tal que  $v(\tau(\Gamma)) \subseteq \{1\}$ , y  $v(\tau(\Delta)) \not\subseteq \{1\}$ . Luego,  $\tilde{v}(\Gamma) \subseteq \{0\}$  y  $\tilde{v}(\Delta) \not\subseteq \{0\}$ . Así,  $\Gamma \not\Vdash_{\text{CL}} \Delta$ .<sup>19</sup>  $\square$

Con los anteriores Lemas, atacamos completitud. Supongamos que  $\Gamma \Vdash_{\text{CL}} \Delta$ . Entonces,  $\tau(\Gamma) \models_{\text{CL}} \tau(\Delta)$  (por el Lema 44). Luego,  $\tau(\Gamma) \vdash_{\text{CL}\downarrow} \tau(\Delta)$  (por la completitud de  $\mathcal{S}_{\text{CL}\downarrow}$ ). Por último,  $\Gamma \Vdash_{\text{CL}\downarrow} \Delta$  (por el Lema 43 y el hecho de que  $\tau$  es involutiva).  $\square$

<sup>19</sup>Apelo de manera implícita al hecho de que  $\tau$  es involutiva.

A la hora de enfrentar el problema de la categoricidad, no necesitamos conclusiones múltiples de ningún tipo; basta con que consideremos argumentos que preservan el valor 0. Además, el estudio de la preservación de falsedad puede recibir justificación filosófica independiente. Por un lado, dentro del paradigma del inferencialismo lógico, podríamos abrazar el *bilateralismo*, o la tesis de que el rechazo es una actitud primitiva tanto como la aceptación, y el significado de las constantes lógicas queda determinado, no sólo por las reglas que gobiernan la aceptación de los enunciados en que esas constantes aparecen, sino también por las reglas que gobiernan su rechazo—esta es, de hecho, la posición que defienden Smiley y Rumfitt cuando presentan sus respectivos cálculos de deducción natural. Por otro lado, podríamos sostener que, con independencia de si el bilateralismo es correcto, el estudio de los argumentos que preservan el valor 0 tiene interés para la lógica filosófica; por ejemplo, ilumina ciertas dualidades semánticas que existen entre v.g. la conjunción y la disyunción, o  $\top$  y  $\perp$ . En cualquier caso, creo que, *incluso* si nuestra justificación filosófica fuera impugnada, el enfoque disyuntivo quedaría en clara desventaja. La razón es que, según argumenté en el Capítulo 3, se desempeña peor que el enfoque conjuntivo a la hora de modelar el razonamiento en el lenguaje natural, y según argumenté en el Capítulo 4, enfrenta algunos problemas conceptuales—a mi entender, más bien graves—relacionados con la ambigüedad de su metateoría. Si quienes defienden el enfoque disyuntivo no contestan de manera exitosa los argumentos que esboqué en esos capítulos, su apelación a las conclusiones múltiples para resolver el problema de la categoricidad puede ser considerada tan o más *ad hoc* que nuestra apelación al estudio de los argumentos que preservan el valor 0.

# Conclusiones

---

Primero, hago una breve reseña de las principales ideas que defendí a lo largo del presente trabajo:

(1) *Las conclusiones múltiples conjuntivas pueden ser útiles para modelar el razonamiento ordinario.* Las razones son, a grandes rasgos, dos:

(1.1) *Hay conclusiones múltiples conjuntivas en el lenguaje natural* (Sección 3.1.2).

A veces, formalizar un argumento usando conclusiones múltiples leídas de manera conjuntiva es más satisfactorio que formalizar el mismo argumento usando una conjunción como conclusión única.

- En general, la identidad de los argumentos parece insensible al orden y cantidad de apariciones de sus premisas, pero la identidad de las conjunciones es sensible al orden y cantidad de apariciones de sus conyuntos.
- Los argumentos con infinitas conclusiones no se pueden formalizar usando una conjunción ordinaria como conclusión única, y el uso de conjunciones infinitarias es costoso en términos de economía expresiva
- Si formalizamos los argumentos de conclusiones en apariencia múltiples con una conjunción como conclusión única, por paridad de razonamiento, deberíamos formalizar los argumentos con premisas en apariencia múltiples con una conjunción única premisa.

Por otro lado, y a pesar de lo que sugieren Cintula y Paoli, emitir un argumento con  $n$  conclusiones múltiples no parece equivalente a emitir  $n$  argumentos con una única conclusión. La hablante del caso no es consciente de estar emitiendo  $n$  argumentos, y salvo que contemos con razones teóricas de peso, no hay motivos para desestimar las intuiciones preteóricas de la hablante acerca de lo que hace con su acto de habla.

---

(1.2) *Pasarse a la lectura conjuntiva es fácil, rápido y no duele* (Capítulos 1 y 2). La exploración técnica arroja que su aplicación no supone revisiones importantes respecto de lo que es la práctica usual de la lógica.

- Es bastante simple de aplicar a la lógica clásica. El sistema resultante, **CCL**, satisface todos los principios estructurales esperables a efectos de modelar el razonamiento no derrotable: reflexividad, transitividad, y monotonía izquierda. La Teoría de la Prueba ostenta cierta elegancia, dado que los cálculos para **CCL** sólo agregan dos reglas que no estaban en conclusiones simples, y ambas son *prima facie* intuitivas.
- La lectura conjuntiva también se aplica sin mayores inconvenientes a un abanico de lógicas no clásicas, incluyendo sistemas subestructurales no transitivos, no reflexivos, no monótonos y no contractivos.
- Hay quienes sostienen que las conclusiones múltiples disyuntivas inducen en la relación de consecuencia lógica una simetría deseable. Las conclusiones múltiples conjuntivas inducen un tipo de simetría distinto aunque emparentado, y en ningún sentido inferior. En términos de ‘belleza estética’, ambos enfoques están a la par.
- Hay quienes sostienen que las lógicas no están determinadas sólo por sus inferencias, sino también por sus metainferencias. La lógica **CCL** tiene todas las metainferencias que podíamos esperar, a efectos de sostener que es una generalización de **CL**. Además, el enfoque conjuntivo habilita una definición satisfactoria de la validez global en metainferencias de conclusiones múltiples.

Por otra parte,

(2) *Las conclusiones múltiples disyuntivas no sirven para modelar el razonamiento*. Y las razones son dos otra vez:

(2.1) *No hay conclusiones múltiples disyuntivas en el lenguaje natural* (Sec. 3.1.1).

Es decir, no hay argumentos cuya formalización exitosa requiera de conclusiones múltiples disyuntivas.

- 
- Como señala Evans, los argumentos sólidos con conclusiones múltiples disyuntivas no proporcionan respaldo a ninguna de sus conclusiones en particular; luego, las ‘conclusiones’ en cuestión no son independientes una de otra en el discurso.
  - En contra de lo que sugiere Restall, el razonamiento por casos no es evidencia en favor de las conclusiones múltiples disyuntivas. El razonamiento se puede formalizar, de manera igual de satisfactoria, en cálculos de conclusiones simples.

(2.2) *El enfoque disyuntivo tiene consecuencias contraintuitivas* (Sección 3.2) Cuando trabajamos con conclusiones simples, o múltiples conjuntivas, la relación de equivalencia lógica (clásica) es una genuina relación de equivalencia. Cuando trabajamos con conclusiones múltiples disyuntivas, no lo es. Esto explica ciertas consecuencias contraintuitivas del enfoque disyuntivo; por ejemplo, hay conjuntos de oraciones que son equivalentes uno al otro, aunque no comparten los mismos modelos.

Finalmente,

(3) *La lectura disyuntiva a las conclusiones múltiples tiene problemas*

(3.1) *Es ambigua* (Secciones 4.1–4.2). Hay ciertas entidades (las colecciones de oraciones) a las que atribuye propiedades distintas (condiciones de verdad, de satisfacción, o contenido) dependiendo de qué lugar ocupan en los enunciados de los que sus nombres forman parte. Quien defiende la lectura disyuntiva tiene tres estrategias a la hora de responder:

- (i) Sacrificar ciertas maneras usuales de hablar acerca de la validez (como ‘preservación de verdad’, ‘inclusión de contenido’).
- (ii) Sacrificar la idea de que, al trabajar con conclusiones múltiples, los *relata* de la relación de consecuencia lógica son colecciones de oraciones.
- (iii) Dar una justificación de la ambigüedad, es decir, explicar por qué las entidades del caso varían sus propiedades de acuerdo con factores *prima facie* irrelevantes.

- 
- Ninguna de las estrategias es, por razones que argumenté, demasiado cómoda.
- (3.2) *Nos recuerda demasiado a TONK* (Sección 4.3) El comportamiento estructural de las conclusiones múltiples disyuntivas se asemeja, en importantes aspectos, al comportamiento de la conectiva TONK. Pero TONK es el caso paradigmático de constante lógica ilegítima. Luego, el comportamiento estructural de las conclusiones múltiples disyuntivas es ilegítimo también. Por supuesto, quien defiende la lectura disyuntiva tiene dos estrategias a disposición:
- (i) Negar que TONK sea una constante ilegítima
  - (ii) Mostrar que, en realidad, hay importantes semejanzas entre TONK y el comportamiento estructural de las conclusiones múltiples disyuntivas

Dicho lo anterior, menciono dos ideas con las que no me comprometo, para así marcar los límites del trabajo. En primer lugar, sostuve, es cierto, que las conclusiones múltiples conjuntivas son útiles en algunos aspectos. Pero no afirmo que deban *reemplazar* a las conclusiones simples, en ningún sentido. Por un lado, las razones que di para su uso se circunscriben a solo una de las posibles aplicaciones de la lógica, que es la de modelar el razonamiento ordinario—queda por verse si hay otras aplicaciones en las que son útiles también. Por otro lado, incluso en la provincia del razonamiento, no creo que las conclusiones múltiples sean un fenómeno generalizado; por el contrario, admito que los argumentos en que aparecen, si bien existen, son más bien infrecuentes. Luego, no pienso que sea preciso cambiar la manera en que formalizamos cuando enseñamos lógica.

En segundo lugar, sostuve, es cierto, que las conclusiones múltiples disyuntivas tienen problemas. Pero no afirmo que carezcan de aplicaciones útiles. Por ejemplo, sirven para definir cálculos de secuentes para la lógica clásica en donde vale la eliminación de corte.<sup>20</sup> También, permiten resolver el problema de la categoricidad. Por lo pronto, entonces, no pienso que debamos eliminar su estudio de la lógica. (Espero haber mostrado, sin embargo, que apelar a conclusiones múltiples disyuntivas no es una movida barata; de hecho, puede considerarse *ad hoc*, si las objeciones que las afectan no reciben respuesta.)

---

<sup>20</sup>Un resultado de eliminación de corte muestra que un cálculo prueba los mismos secuentes con y sin la regla Cut; esto es deseable por múltiples razones, entre otras, que bajo ciertas condiciones implica consistencia.

---

Para terminar, esbozo lo que creo que es la moraleja general de este trabajo. Tenemos *cierta* evidencia empírica y consideraciones teóricas que motivan el uso de conclusiones múltiples conjuntivas al modelar el razonamiento ordinario. Tenemos *pocas o ninguna razón* que motive el uso de conclusiones múltiples disyuntivas para el mismo fin. Al mismo tiempo, la lectura disyuntiva de las conclusiones múltiples se encuentra con ciertas objeciones filosóficas, que han pasado más bien inadvertidas en la literatura, y que no aquejan a la lectura conjuntiva.

A veces, mi sensación predominante es: “Los sistemas de conclusiones múltiples conjuntivas son interesantes. Vale la pena estudiarlos”. Otras veces, la idea que prevalece es: “Las conclusiones simples están bastante bien, a los propósitos que nos suelen interesar en lógica. Pero, ¿qué es eso de conclusiones múltiples *disyuntivas*? ¡No tiene sentido!” La lectora elige con cuál de las dos quedarse, si es que no ambas.

# Bibliografía

---

- Ackermann, W. (1956). Begründung einer strengen Implikation. *The journal of symbolic logic*, 21(2), 113-128.
- Allen, C. & Hand, M. (2001). *Logic primer*. Mit Press.
- Avron, A. (2003). Classical gentzen-type methods in propositional many-valued logics. *Beyond two: Theory and applications of multiple-valued logic* (pp. 117-155). Springer.
- Barrio, E., Rosenblatt, L. & Tajer, D. (2015). The logics of strict-tolerant logic. *Journal of Philosophical Logic*, 44(5), 551-571.
- Beall, J. & Restall, G. (2006). *Logical Pluralism*. Oxford University Press.
- Beall, J., Restall, G. & Sagi, G. (2019). Logical Consequence. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2019). Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Beall, J. & Ripley, D. (2004). Analetheism and dialetheism. *Analysis*, 64(1), 30-35.
- Belnap, N. (1977). How a computer should think. En G. Ryle (Ed.), *Contemporary aspects of philosophy* (pp. 30-55). Oriel Press.
- Belnap, N. D. (1962). Tonk, plonk and plink. *Analysis*, 22(6), 130-134.
- Boolos, G. S., Burgess, J. P. & Jeffrey, R. C. (2002). *Computability and logic*. Cambridge university press.
- Brady, R. T. (1996). Relevant implication and the case for a weaker logic. *Journal of philosophical logic*, 25(2), 151-183.
- Carnap, R. (1943). *Formalization of Logic*. Harvard University Press.
- Carnap, R. (2014). *Logical syntax of language*. Routledge. (Fecha inicial de publicación 1937)
- Cintula, P. & Paoli, F. (2016). Is multiset consequence trivial? *Synthese*, 1-25.

- 
- Cobreros, P., Egré, P., Ripley, D. & Rooij, R. V. (2013). Reaching transparent truth. *Mind*, 122(488), 841-866.
- Cobreros, P., Egré, P., Ripley, D. & van Rooij, R. (2012a). Tolerance and Mixed Consequence in the S'valuationist Setting. *Studia logica*, 100(4), 855-877.
- Cobreros, P., Egré, P., Ripley, D. & van Rooij, R. (2012b). Tolerant, classical, strict. *Journal of Philosophical Logic*, 41(2), 347-385.
- Cobreros, P., Egré, P., Ripley, D. & van Rooij, R. (2015). Vagueness, truth and permissive consequence. *Unifying the philosophy of truth* (pp. 409-430). Springer.
- Cobreros, P., La Rosa, E. & Tranchini, L. (2021). (I can't get no) antisatisfaction. *Synthese*, 198(9), 8251-8265.
- Cook, R. T. (2005). What's wrong with tonk (?) *Journal of Philosophical Logic*, 34(2), 217-226.
- Copi, I., Cohen, C. & Rodych, V. (2016). *Introduction to logic*. Routledge.
- Da Ré, B., Pailos, F., Szmuc, D. & Teijeiro, P. (2020). Metainferential duality. *Journal of Applied Non-classical Logics*, 30(4), 312-334.
- Da Ré, B., Szmuc, D. & Teijeiro, P. (2021). Derivability and Metainferential Validity. *Journal of Philosophical Logic*, 1-27.
- Dicher, B. & Paoli, F. (2018). The original sin of proof-theoretic semantics. *Synthese*, 1-26.
- Dicher, B. & Paoli, F. (2019). ST, LP and tolerant metainferences. *Graham Priest on dialetheism and paraconsistency* (pp. 383-407). Springer.
- Dorandi, T. (2013). *Diogenes Laertius: Lives of eminent philosophers* (Vol. 50). Cambridge University Press.
- Eklund, M. (2017). Making sense of logical pluralism. *Inquiry*.
- Evans, J. S. (2005). Deductive Reasoning. En K. J. Holyoak & R. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 169-184). Cambridge University Press.
- Ferguson, T. M. (2015). Logics of nonsense and Parry systems. *Journal of Philosophical Logic*, 44(1), 65-80.

- 
- Ferguson, T. M. (2017). *The proscriptive principle and logics of analytic implication*. Tesis de Doctorado, City University of New York (CUNY).
- Fiore, C., Pailos, F. & Rubin, M. (2022). Inferential Constants [Manuscrito].
- Fjellstad, A. (2015). How a semantics for tonk should be. *The Review of Symbolic Logic*, 8(3), 488-505.
- Font, J. M. (2001). *Abstract Algebraic Logic. An Introductory Textbook*. College Publications.
- French, R. (2016). Structural reflexivity and the paradoxes of self-reference. *Ergo, an Open Access Journal of Philosophy*, 3.
- Galatos, N. & Tsinakis, C. (2009). Equivalence of consequence relations: an order-theoretic and categorical perspective. *The Journal of Symbolic Logic*, 74(3), 780-810.
- Garson, J. W. (2001). Natural semantics: Why natural deduction is intuitionistic. *Theoria*, 67(2), 114-139.
- Gentzen, G. (1934–35). Untersuchungen iiber das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39, 176–210 and 405-431.
- Glanzberg, M. (2015). Logical consequence and natural language. *Foundations of logical consequence*, 71-120.
- Heyting, A. (1930). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Sitzungsbericht Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin, physikalisch-mathematische Klasse II*, 42-56.
- Hjortland, O. T. (2017). Anti-exceptionalism about logic. *Philosophical Studies*, 174(3), 631-658.
- Hjortland, O. T. (2019). What counts as evidence for a logical theory? *The Australasian Journal of Logic*, 16(7), 250-282.
- Hodges, W. (1980). *Logic*. Penguin Books.
- Humberstone, I. (1988). Heterogeneous logic. *Erkenntnis*, 29(3), 395-435.
- Humberstone, L. (2011). *The connectives*. MIT Press.
- Hurley, P. J. (2014). *A concise introduction to logic*. Cengage Learning.

- 
- Jansana, R. (2016). Algebraic Propositional Logic. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Kleene, S. C. (1952). Introduction to metamathematics.
- Kneale, W. (1956). The province of logic. En H. D. Lewis (Ed.), *Contemporary British Philosophy, 3rd series*. Allen & Unwin.
- Kolodny, N. & MacFarlane, J. (2010). Ifs and oughts. *The Journal of philosophy*, 107(3), 115-143.
- Kripke, S. (2021). The Question of Logic [Manuscrito].
- Kripke, S. A. (1965). Semantical analysis of intuitionistic logic I. En M. D. J. Crossley (Ed.), *Formal Systems and Recursive Functions* (pp. 92-130). North-Holland.
- Lambek, J. (1958). The mathematics of sentence structure. *The American Mathematical Monthly*, 65(3), 154-170.
- Lambek, J. (1961). On the calculus of syntactic types. *Structure of language and its mathematical aspects*, 12, 166-178.
- Mares, E. (2020). Relevance Logic. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Martin, B. & Hjortland, O. (2021). Logical predictivism. *Journal of Philosophical Logic*, 50(2), 285-318.
- McGee, V. (1985). A counterexample to modus ponens. *The Journal of Philosophy*, 82(9), 462-471.
- Moortgat, M. (2020). *Categorical investigations*. De Gruyter.
- Moschovakis, J. (2021). Intuitionistic Logic. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2021). Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Murzi, J. & Steinberger, F. (2017). Inferentialism. *A companion to the philosophy of language*, 197-224.
- Negri, S. & Von Plato, J. (2008). *Structural proof theory*. Cambridge university press.
- Nowak, M. (2020). Disjunctive and conjunctive multiple-conclusion consequence relations. *Studia Logica*, 108(6), 1125-1143.
- Pailos, F. & Toranzo Calderón, J. (2021). Beyond Mixed Logics [Manuscrito].

- 
- Paoli, F. (2013). *Substructural logics: a primer* (Vol. 13). Springer Science & Business Media.
- Parry, W. T. (1933). Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation). *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4(5-6).
- Parry, W. T. (1968). The logic of CI Lewis. *The philosophy of CI Lewis*, 115-154.
- Popper, K. (2002). *The logic of scientific discovery*. Routledge. (Fecha inicial de publicación 1935)
- Post, E. L. (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions. *American journal of mathematics*, 43(3), 163-185.
- Prawitz, D. (2006). *Natural deduction: A proof-theoretical study*. Courier Dover Publications. (Fecha inicial de publicación 1965)
- Priest, G. (1979). The Logic of Paradox. *Journal of Philosophical Logic*, 8(1), 219-241.
- Priest, G. (1999). Negation as cancellation, and connexive logic. *Topoi*, 18(2), 141-148.
- Priest, G. et al. (2006). *Doubt Truth to be a Liar*. Oxford University Press.
- Priest, G. (2008). *An introduction to non-classical logic: From if to is*. Cambridge University Press.
- Priest, G. (2016). Logical disputes and the a priori [Disputas lógicas eoa priori]. *Princípios: Revista de Filosofia (UFRN)*, 23(40), 29-57.
- Priest, G. (2017). *Logic: A very short introduction* (Vol. 29). Oxford University Press.
- Prior, A. N. (1960). The runabout inference-ticket. *Analysis*, 21(2), 38-39.
- Pynko, A. (2010). Gentzen's cut-free calculus versus the logic of paradox. *Bulletin of the Section of Logic*, 39(1/2), 35-42.
- Quine, W. V. (1986). *Philosophy of logic*. Harvard University Press.
- Restall, G. (2002). *An introduction to substructural logics*. Routledge.
- Restall, G. (2005). Multiple conclusions. En P. Hajek, L. Valdes-Villanueva & D. Westerståhl (Eds.), *Logic, methodology and philosophy of science: Proceedings of the twelfth international congress* (pp. 189-205).
- Ripley, D. (2012). Conservatively extending classical logic with transparent truth. *The Review of Symbolic Logic*, 5(2), 354-378.

- 
- Ripley, D. (2013a). Paradoxes and failures of cut. *Australasian Journal of Philosophy*, 91(1), 139-164.
- Ripley, D. (2013b). Revising up: Strengthening classical logic in the face of paradox. *Philosophers*, 13.
- Ripley, D. (2015). Comparing substructural theories of truth. *Ergo, an Open Access Journal of Philosophy*, 2.
- Ripley, D. (2021). One step is enough. *Journal of Philosophical Logic*, 1-27.
- Rosenblatt, L. (2019). Noncontractive classical logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 60(4), 559-585.
- Rosenblatt, L. (2021). On structural contraction and why it fails. *Synthese*, 198(3), 2695-2720.
- Rumfitt, I. (2008). Knowledge by deduction. *Grazer Philosophische Studien*, 77(1).
- Russell, G. (2015). The justification of the basic laws of logic. *Journal of Philosophical Logic*, 44(6), 793-803.
- Scott, D. (1974). Completeness and axiomatizability in many-valued logic. *Proceedings of the Tarski symposium*, 25, 411-436.
- Shapiro, S. & Kouri Kissel, T. (2021). Classical Logic. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2021). Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Shoemith, D. J. & Smiley, T. J. (1978). *Multiple-conclusion logic*. CUP Archive.
- Smiley, T. (1996). Rejection. *Analysis*, 56(1), 1-9.
- Steinberger, F. (2011). Why conclusions should remain single. *Journal of Philosophical Logic*, 40(3), 333-355.
- Strasser, C. & Antonelli, G. A. (2019). Non-monotonic Logic. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Szmuc, D. (2019). *Lógicas de la Inclusión de Contenido*. Tesis de Doctorado, Universidad de Buenos Aires (UBA).

- 
- Szmuc, D. E. (2021). A simple logical matrix and sequent calculus for Parry's logic of Analytic Implication. *Studia Logica*, 1-38.
- Tarski, A. (1983a). *Logic, semantics, metamathematics: papers from 1923 to 1938*. Hackett Publishing.
- Tarski, A. (1983b). On the concept of logical consequence. En J. Corcoran (Ed.), *Logic, semantics, metamathematics*. Hackett Indianapolis. (Fecha inicial de publicación 1936)
- Tennant, N. (2002). *The taming of the true*. Oxford University Press.
- Wolfram, S. (2014). *Philosophical logic: an introduction*. Routledge.
- Zardini, E. (2011). Truth without contra(di)ction. *The Review of Symbolic Logic*, 4(4), 498-535.